Archimede, chi era costui…..?

(In onore della geometria)

Area del segmento parabolico

La *medaglia Fields*, premio istituito nel 1936, è considerato il "Nobel della matematica" ed è assegnato, ogni quattro anni, a matematici sotto i quarant'anni, per il complesso della loro produzione scientifica.
Su essa è riprodotta una presunta effigie di **Archimede**, contornata dal motto "TRANSIRE SUUM PECTUS MUDOQUE POTIRI", TRASCENDERE I PROPRI LIMITI E PADRONEGGIARE IL MONDO.
Ciò testimonia la straordinaria considerazione che la comunità scientifica internazionale ha nei riguardi del genio di Siracusa.

Vita di Archimede

Poche sono le notizie sulla vita di Archimede (287-212). Pare fosse figlio di un astronomo, Fidia. È probabile che abbia studiato ad Alessandria d'Egitto che, sotto i Tolomei, era divenuta la capitale della cultura del mondo antico, con la celebre Biblioteca e l'annesso Museo, lo scrigno delle Muse. Questo era infatti un'università d'eccellenza in cui, a testimonianza dell'unità della cultura, si studiavano a esempio Metafisica, Retorica e Poetica, ma anche Matematica, Logica e Fisica. È documentato che fu in costante corrispondenza epistolare con i matematici alessandrini, dei quali stimava in particolare Conone e soprattutto Eratostene, che per quarant'anni fu il Direttore della Biblioteca. È certo che Archimede fosse stabilmente a Siracusa dopo il 240 a.C., dato che il suo *Arenario* è dedicato a Gelone, figlio di Gerone II, e associato da questi al regno in quella data. La sua morte è ampiamente documentata dai resoconti sulla seconda guerra punica dagli storici Polibio, Livio e Plutarco.

La sua figura di Archimede è tanto nota quanto poco è nota la sua opera; su di lui sono conosciuti soprattutto aneddoti e battute. Archimede entrò prestissimo nel mito attraverso le cronistorie degli storici su menzionati che non poterono ignorare come, con le sue terrificanti macchine belliche, aveva fatto venire un gran mal di testa al generale romano Marcello durante l'assedio di Siracusa del 212 a.C. nella seconda guerra punica. Ma col passare dei secoli, la sua figura è diventata quella del <<buon>> sapiente, dell'inventore geniale ma decisamente strambo: tutti conoscono la famosa frase<<Datemi un punto d'appoggio e solleverò il mondo>> o la storiella di <<Eureka! Eureka!>>. Nell'immaginario collettivo Archimede è il genio distratto (al punto di correre nudo per le strade di Siracusa gridando<<Eureka! Eureka!>>), che inventa dispositivi <<impossibili>> come gli specchi ustori con cui *avrebbe* bruciato le navi romane, che fa scoperte mirabolanti (la legge del galleggiamento) mentre fa il bagno nella vasca: questo Archimede assomiglia di più all'Archimede Pitagorico di Disney che ad uno dei più grandi scienziati esistiti.

Ci occuperemo dell'opera matematica di Archimede.
Per comprenderla a pieno, è opportuno prendere le mosse dalla profonda crisi del pensiero filosofico-scientifico greco conseguente alla scoperta da parte dei pitagorici degli álogoi, cioè dei numeri irrazionali avvenuta nel V secolo a.C.. Tali numeri minavano dalle fondamenta la concezione del mondo del Maestro che si fondava sui numeri naturali e per estensione su quelli razionali. Il punto monade, al tempo stesso numero e principio primo, non si conciliava con l'*infinita* sequenza di rapporti fra segmenti incommensurabili che portava ai numeri irrazionali come radice di due.
Per chiarire le difficoltà che gli irrazionali comportano è illuminante quanto scrive **Borges** nel *De docta ignorantia:*
C'è un concetto che è il corruttore e l'ammattitore di tutti gli altri. Non parlo del Male il cui limitato impero è l'Etica; parlo dell'infinito….. L'idra dalle nove teste di serpente conferirebbe adeguato orrore al suo portico; …e i suoi capitoli centrali non ignorerebbero le congetture di quel remoto cardinale tedesco - **Nicolaus Krebs**, **Nicolò Cusano** - *che nella circonferenza vide un poligono con un numero infinito di angoli e lasciò scritto che una linea infinita sarebbe una retta, un triangolo, un circolo e una sfera*.

Si fa strada quello che è stato definito "horror infiniti", l'orrore dell'infinito.
In tal senso infatti vanno letti i paradossi di **Zenone** di Elea, in difesa delle idee del maestro **Parmenide,** contro il pluralismo di **Pitagora** e il movimento di **Eraclito**. Le acute e sottili argomentazioni di **Zenone** "hanno influenzato il concetto d'infinito da allora ai nostri giorni", sosteneva **Bertrand Russell**.

Torniamo al genio siracusano.
La riscoperta di Archimede è stata essenziale per la nascita della matematica e della scienza moderna.
Nel Rinascimento si approfondisce lo studio di **Aristotele** e, successivamente di **Archimede** ed **Apollonio** di Perga. Ma è l'introduzione della stampa che permette la diffusione della cultura scientifica, su una scala impensabile fino al Medioevo, a far

uscire Archimede dalle nebbie della leggenda e riportare la sua opera in primo piano. Sarà dalla riflessione sull'opera del geniale siracusano che **Luca Valerio**, **Bonaventura Cavalieri ed Evangelista Torricelli** riusciranno a rompere per la prima volta il paradigma della geometria greca classica e a creare nuove metodologie più generali, e **Keplero**, **Galileo** ed altri fondarono la loro formazione scientifica.

Il metodo di esaustione

Eudosso di Cnido fu il più eminente matematico dell'**Accademia** e uno dei quattro moschettieri della matematica greca con **Euclide**, **Archimede** – *D'Artagnan* - **e Apollonio**. Per superare le difficoltà che sorgono nel "maneggiare" l'infinito escogitò un modo per "aggirarlo" mediante quello che nel 600 sarà chiamato <u>*metodo di esaustione*</u>.
Le sue straordinarie applicazioni, soprattutto a opera di Archimede, costituiscono l'acme del pensiero scientifico greco e sono state riprese <u>*solo*</u> nel XVI secolo e rese più agili e generali nel XVII secolo da **Fermat** e soprattutto dai due geniali architetti del calcolo differenziale **Leibniz** e **Newton**.
Col metodo di esaustione i matematici greci, in particolare Archimede, *hanno surrogato l'integrale definito*. Così il genio siracusano ha costruito le sue straordinarie dimostrazioni, fra cui:

- Le aree di cerchio, segmento parabolico e superficie sferica
- I volumi di sfera, parabolide, ellissoide ed iperboloide finiti.
- I baricentri di triangolo, parallelogramma, trapezio, segmento parabolico, paraboloide.

<u>Tre puntualizzazioni</u>.

1. In ciò che segue l'insieme dei numeri naturali è N={1, 2, 3,……n,…}.
2. Utilizzeremo il simbolismo algebrico, cui siamo abituati, perché quello originale, strettamente geometrico, è per noi pesante: conserveremo però lo spirito delle idee di Archimede.
3. In tutta la produzione scientifica greca, l'<u>orrido infinito</u> era bandito.

Per introdurre il metodo di esaustione prendiamo l'avvio dall'**Assioma di Eudosso-Archimede** riferito alle superfici:
<u>Date due superfici disuguali **S** ed **s**, con **S>s**, la loro differenza può essere addizionata a se stessa fino a diventare più grande di qualunque superficie assegnata</u>.
Noi moderni lo esprimiamo come segue:
<u>Date due superfici disuguali **S>s**, esiste un multiplo delle minore che supera la maggiore</u>.
Cioè, se **S>s** **v** **N / v·s>S**. È immediato che **n** **N** ed **n>v** si ha **n·s>S**.
Si dimostra che le due formulazioni sono equivalenti.

L'assioma di Eudosso-Archimede consente di dimostrare la
<u>**Proprietà di esaustione**</u> (per le superfici)

“Se da una qualsiasi superficie si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, finiremo per coll’ottenere, dopo un numero abbastanza grande di volte, una superficie resto inferiore a qualsiasi superficie assegnata”.

Infatti, sia **S** una superficie esistente (cioè di area non nulla).
Applichiamo a **S** il procedimento di sopra e indichiamo con $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$,….,$\mathbf{S_n}$ le superfici via via ottenute; si ha:
$\mathbf{S_1 \leq S/2}$; $\mathbf{S_2 \leq S_1/2}$, cioè $\mathbf{S_2 \leq S/2^2}$; $\mathbf{S_3 \leq S_2/2}$, ossia $\mathbf{S_3 \leq S/2^3}$; **……**; $\mathbf{S_n \leq S_{n-1}/2}$, o anche $\mathbf{S_n \leq S/2^n}$.
Proviamo che: assegnata una qualsiasi superficie esistente **σ** - cioè con area diversa da zero - (*per quanto piccola*)

$$\exists\, \boldsymbol{\nu_\sigma} \in \mathbf{N} /\ \mathbf{S}/\ {}^{2} < \boldsymbol{\sigma}.$$

(Chiaramente $\mathbf{S/2^n < \sigma}$ $\forall$ $\mathbf{n \in N}$ ed $\mathbf{n > \nu_\sigma}$).
Infatti se $\boldsymbol{\sigma \geq S}$, la tesi è chiaramente vera.
Supponiamo allora $\boldsymbol{\sigma < S}$.
Per l’assioma di Eudosso-Archimede $\exists\ \boldsymbol{\nu_\sigma \in N/\ \nu_\sigma \sigma > S}$, cioè: $\boldsymbol{S/\nu_\sigma < \sigma}$.
Poiché $\forall$ $\mathbf{n \in N}$ $\mathbf{S/2^n < S/n}$, segue la tesi.
Evidentemente $\boldsymbol{S/2^n < \sigma}$, $\forall \mathbf{n} > \boldsymbol{\nu_\sigma}$.
Euclide e soprattutto Archimede utilizzano ampiamente il metodo di esaustione.
La situazione precedente, in termini moderni, si può esprimere come segue:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r}{2^n} = 0, \text{ con } \mathbf{r} \text{ reale positivo.}$$

Infatti, $\forall$ **r** $\in$, scriviamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} = 0$, se $\forall$ $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ $\exists$ $\boldsymbol{\nu_\varepsilon}$ **N**/$\forall$ $\mathbf{n} > \boldsymbol{\nu_\varepsilon}$ si ha $\frac{r}{n} < \varepsilon$.

Invero è $\frac{r}{n} < \varepsilon$ se **n**> ; diciamo allora con $\boldsymbol{\nu_\varepsilon}$ il più piccolo numero naturale tale che $\boldsymbol{\nu_\varepsilon} \geq$; poiché $\forall$ **n** **N** **0**< $\frac{r}{2^n} < \frac{r}{n}$, abbiamo che$\forall$ $\mathbf{n} > \boldsymbol{\nu_\varepsilon}$ **0**< $\frac{r}{2^n} < \frac{r}{n}$ <**ε**: per il teorema del confronto, essendo **ε>0** (*anche arbitrariamente piccolo*) $\lim_{n\to\infty} \frac{r}{2^n} = 0$.

Ci occuperemo della quadratura del *segmento parabolico*. La scelta è legata a due motivi importanti:

- Quello affrontato è un problema significativo per descrivere spirito e metodologia di Archimede matematico.
- La risoluzione rende il giusto onore alla geometria che ormai - purtroppo - viene, se non eliminata, fortemente e colpevolmente trascurata nella scuola.

Il metodo meccanico, opera dedicata a **Eratostene** - Direttore della Biblioteca di Alessandria, matematico e ingegnere – è fondamentale per comprendere il *modus operandi* di Archimede. In questo trattato, ritrovato solo nel 1906, piccolo di dimensione ma straordinariamente importante, il grande siracusano rivela il metodo che seguiva per intuire i risultati che poi dimostrava rigorosamente col metodo di esaustione.

Il percorso logico di Archimede al fine di stabilire le diverse proprietà di figure curvilinee.

1. Fase euristica, guidata da intuizione, analogie e congetture, in cui utilizza esperienze concrete e concettuali; queste ultime mediante il *metodo meccanico*, che chiariremo fra breve.
2. Momento di ricerca e determinazione di figure note che approssimano, per difetto (e per eccesso), la figura studiata e che consolidano la congettura del risultato.
   "*Che approssimano*" significa per Archimede, come per noi, che la differenza fra le loro superfici si può rendere minore di qualunque superficie scelta, *per quanto piccola*.
3. Costruzione della dimostrazione rigorosa del risultato con la doppia riduzione all'assurdo.

La matematica quindi, secondo Archimede, non è solo rigore, è prima ancora e maggiormente intuizione, formulazione di congetture plausibili, ottenute anche mediante esperienze reali o ideali.

Scrive infatti a Eratostene ne *Il Metodo.*

‹‹ Poiché ti riconosco studioso e maestro eccellente di filosofia che sa apprezzare, quando è il caso, le ricerche matematiche, ho creduto bene esporti in qust'opera le particolarità di un metodo mediante il quale ti sarà possibile acquisire una certa perizia a trattare cose matematiche per mezzo di considerazioni meccaniche. [.....] Perché sono persuaso che non poca utilità esso arrecherà alla matematica; penso infatti che alcuni dei presenti e dei posteri, mediante questo metodo, possano trovare anche altri teoremi che a me non sono ancora venuti in mente ››.

Queste parole furono profetiche; infatti, come è stato scritto, solo dal secolo XVI, **Valerio**, **Cavalieri**, **Torricelli** e successivamente **Keplero**, **Fermat** e altri, e infine **Leibniz** e **Newton**, si staccarono progressivamente dal ponderoso metodo di esaustione, introducendo il calcolo differenziale che risultò un mezzo potente e generale per risolvere una grande quantità di problemi sia in matematica che in fisica. In forza della grande messe di risultati, all'inizio non ci si preoccupò molto di precisare con rigore le premesse. La sistemazione rigorosa e organica si realizzò solo nell'ottocento ad opera di **Chauchy**, **Bolzano**, **Weierstrass**, **Canto**r e **Dedekind** (Leibniz e Newton non avevano la più pallida idea di una definizione rigorosa di numero reale o di limite di una funzione).

IL *CORPUS* ARCHIMEDEO

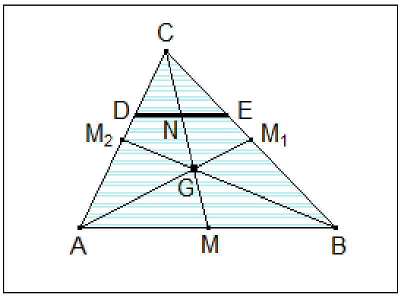
Lista delle opere di Archimede che ci sono pervenute, secondo l'ordine in cui compaiono nell'edizione critica di Heiberg.

1. *Sulla sfera e sul cilindro*, in due libri: l'opera di cui era più orgoglioso in cui determina volume e superficie della sfera. Di essa ci occuperemo ampiamente in seguito.
2. *Misura del cerchio*. Consiste di tre sole proposizioni. In esse trova l'area del cerchio e dimostra che: il rapporto tra la circonferenza ed il diametro deve essere compreso tra **3+10/71 e 3+10/70**.
3. *Sui conoidi e sferoidi*, in cui ottiene come risultati i volumi dei solidi di rotazione paraboloide, ellissoide e iperboloide. Opera della piena maturità di Archimede, in cui il genio siracusano propone un metodo euristico più generale per la determinazione dei volumi identico a quello che verrà introdotto diciotto secoli dopo dai matematici del Seicento.
4. *Sulle spirali*. Opera assai singolare in cui determina la curva descritta da un punto in moto uniforme su una retta che si muove a sua volta di moto circolare uniforme.
   Essa è il primo tentativo della descrizione matematica del movimento.
   Tale curva è nota come *spirale di Archimede*.
5. *Sull'equilibrio dei piani*, opera in due libri. Nel primo viene dedotta la legge della leva, basandosi sul principio di simmetria bilaterale, e viene determinato il centro di gravità di alcune figure piane: parallelogramma, triangolo, trapezio. Il secondo è interamente mirato ad individuare il centro di gravità del segmento di parabola.
6. *Arenario*. Vi si presenta un sistema di numerazione in grado di scrivere numeri con ottantamila milioni di milioni di cifre .
7. *Quadratura della parabola.* Il testo è diviso in due parti, la quadratura "meccanica" e quella "geometrica". Di essa discuteremo per esteso più avanti.
8. *Sui galleggianti*, in due libri. Nel primo viene enunciato e dimostrato il ben noto principio di Archimede, nel secondo è studiato il comportamento di un paraboloide galleggiante. Per questo lavoro e per quello *Sull'equilibrio dei piani*, il grande siracusano è considerato a ragione il padre della fisica-matematica.
9. *Stomachion.* Operetta curiosa in cui si tratta di come dividere un quadrato o un rettangolo in parti commensurabili.
10. *Sul metodo meccanico*. Opera dedicata a **Eratostene**, fondamentale per comprendere il *modus operandi* di Archimede, in cui rivela il metodo euristico che seguiva per intuire i risultati che poi dimostrava col procedimento rigoroso di esaustione. Ne vedremo la sistematica applicazione nelle sue opere.
11. *Libro dei lemmi.* Unica opera in cui il Nostro si occupa di geometria elementare. In essa tratta di figure come l'*arbelos* (*coltello del calzolaio*), il *salinon* (*saliera*) e la nota trisezione archimedea dell'angolo. Il *Libro dei lemmi* è pervenuto solo attraverso una parafrasi araba.
12. *Il problema dei buoi.* Opera brevissima in cui il genio siciliano sfida i matematici del suo tempo a risolvere il problema di trovare il numero dei buoi – bianchi, pezzati, neri e fulvi – che il dio Sole pascolava nella Trinacria, note

certe relazioni fra il numero dei buoi di ogni singolo colore. Il problema conduce a un'equazione le cui soluzioni portano a calcoli con più di 200.000 cifre. Non è noto come Archimede possa essere pervenuto alla soluzione.

Prima di esporre alcune considerazioni sul Metodo e accostarci alla quadratura della parabola, è opportuno chiarire un importante aspetto dell'opera di Archimede.
Per gli antichi greci una figura del piano o dello spazio esisteva ***solo*** quando se ne poteva dare un procedimento di costruzione. È per questo motivo che non esistevano procedure generali. Solo nella prima metà del XVII, quando con **Fermat** e **Descartes** si arriverà all'identificazione fra curve ed equazioni, poiché le proprietà dell'<u>oggetto geometrico</u> preesisteranno allo stesso, l'invenzione e l'utilizzazione di metodi generali diverranno uno dei problemi centrali della matematica.
In effetti, fino all'opera *Sui conoidi e sferoidi*, il genio siracusano riusciva di volta in volta con straordinaria maestria a escogitare i poligoni che approssimavano le figure oggetto di studio. *Sui conoidi e sferoidi* invece si trova un procedimento generale che si può applicare a tutti i casi che esamina, paraboloidi, ellissoidi ed iperboloidi finiti: è la costruzione di scaloidi cilindrici circoscritti e inscritti nelle figure studiate. **È quello che usiamo noi nel calcolo degli integrali definiti per il calcolo dei volumi**.

Vediamo più da vicino Il Metodo. Aristotele si era occupato della leva e aveva proposto un complesso sistema di postulati da cui dedurne le leggi. Archimede invece nell'opera *Sull'equilibrio dei piani*, le deduceva da un unico semplice e chiaro postulato:
<u>Corpi a simmetria bilaterale sono in equilibrio</u>.
Nel primo libro deduceva da questo postulato, per mezzo della geometria elementare,



il centro di gravità di *triangolo*, *parallelogramma* e *trapezio*. Determinava poi nel secondo libro i centri di gravità di *segmento parabolico* e *parabolide*.
L'idea che sta alla base dei procedimenti si può chiarire col semplice esempio del baricentro del triangolo.
<u>L'esposizione non è quella di Archimede, ma le argomentazioni ne rispettano lo spirito.</u>
Siano **ABC** un triangolo e **CM** la mediana relativa al lato **AB** (figura 1). Archimede pensava la superficie del triangolo costituita da corde "pesanti" parallele ad **AB** - che

“riempiono” il triangolo (in effetti approssima il triangolo con parallelogrammi con un lato parallelo ad **AB**, la cui altezza si può rendere minore di qualunque segmento assegnato, per quanto piccolo).

Consideriamo una di queste corde, **DE**, che interseca **CM** in **N**. Poiché $\overline{AM} = \overline{MB}$ e triangoli **DNC** e **AMC** sono simili, abbiamo $\overline{DN} = \overline{NE}$. Allora, per l’assioma di simmetria, **N** è il baricentro di **DE**; quindi il centro di gravità **G** del triangolo è il punto d’incontro delle mediane e si trova come è noto, a distanza **d** da **C**, tale che **d=2/3** $\overline{AC}$, quindi: $CG = 2GM$.

Dimostra poi la proprietà intuita per via meccanica, con la consueta doppia riduzione all’assurdo.

Archimede passa successivamente al baricentro di un segmento parabolico.

Per introdurlo diamo la seguente <u>definizione</u>:

si chiama **diametro** di una parabola **p** di vertice **V** e asse **a** ogni semiretta interna alla parabola che ha origine su **p** ed è parallela al suo asse.

Considerato allora il diametro **d** per un punto $\mathbf{V^d}$ di **p**, tracciamo una corda **AB** *parallela* alla tangente **t** in $\mathbf{V^d}$.

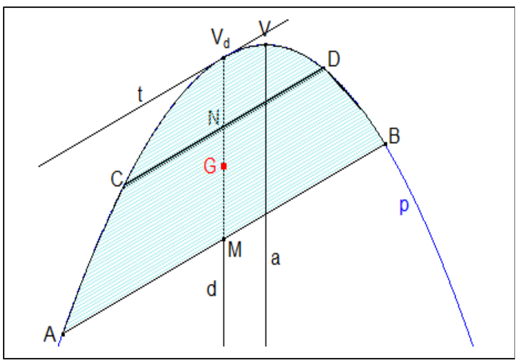
Diciamo **segmento parabolico** la superficie determinata dalla corda **AB** e dall’arco di parabola **A** $\mathbf{V^dB}$ (figura

Archimede utilizza a questo punto due proprietà - che dice dimostrate prima in certi *Elementi* di cui non cita l’autore - le quali assicurano che:

1) il punto medio **N** di una corda **CD** del segmento parabolico $\mathbf{AV^dB}$ parallela alla tangente in $\mathbf{V^d}$ alla parabola, appartiene al diametro **d**;
2) il rapporto $\frac{\overline{V_dN}}{\overline{CN}^2}$ **=k** costante, che possiamo scrivere $\overline{V_dN} = k\overline{CN}^2$.

In forza della **1)** il baricentro di $\mathbf{AV_dB}$ appartiene al diametro **d**. A questo punto, come per il triangolo, ma con argomentazioni molto più complesse, prova che il baricentro **G** del segmento parabolico si trova su **d** a distanza **δ=** $\frac{3}{5}\overline{VM}$ da $\mathbf{V_d}$.

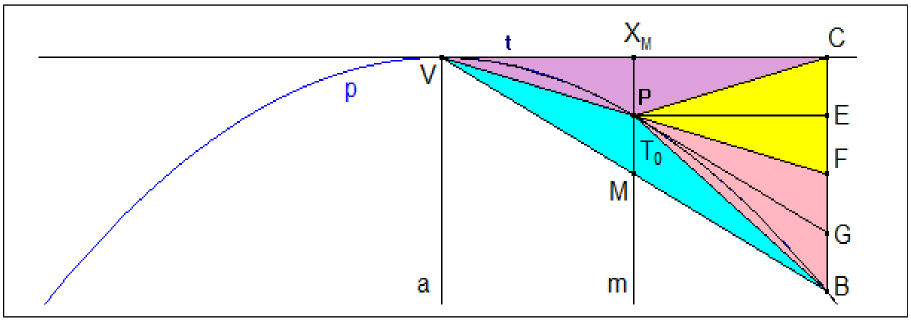
(Due possibili dimostrazioni di **1)** e **2)** si trovano in Appendice)



Quadratura della parabola

Come i suoi predecessori, Archimede chiama la parabola “ortotomo”, cioè sezione di un cono retto. Infatti i termini *parabola*, *ellisse* e *iperbole*, attribuiti alle curve sezioni di un cono con piani di diversa giacitura, furono coniati solo più tardi dall’ultimo grande matematico greco, **Apollonio** di Perga (III-II secolo a.C.). Tali nomi fanno riferimento ai problemi, esposti nel I, II e VI libro degli *Elementi* di Euclide e che in seguito sono stati chiamati di “applicazioni delle aree”. Queste erano gli *strumenti geometrici* con cui i greci *risolvevano* i problemi che per noi comportano equazioni algebriche di **I** o **II** grado.

Quadratura meccanica della parabola
Archimede, utilizzando argomentazioni meccaniche sui baricentri, trasforma il calcolo dell’area incognita della sua figura in quella di una figura nota.
Per semplicità espositiva e chiarezza grafica usiamo un segmento parabolico $\mathbf{S_p}$ in cui uno degli estremi è il vertice della parabola, ma le argomentazioni valgono qualunque sia $\mathbf{S_p}$. La situazione esaminata comporta infatti la costruzione di rettangoli, mentre quella generale di parallelogrammi, ma la proprietà utilizzata – che i loro lati opposti sono isometrici – vale per questi ultimi .
Data una parabola **p** di vertice **V** e asse **a**, sia **B** un punto generico di **p**. Indichiamo con **M** il punto medio della corda **VB** e con **t** la tangente a **p** in **V**. Tracciamo per **B** ed **M** le parallele **b** e **m** all'asse della parabola e siano **C** e $\mathbf{X_M}$ i rispettivi punti comuni con **t** e **P** l’intersezione di **m** e **p**. Denotiamo poi con **F** il punto comune alla semiretta **VP** e al segmento **BC** e con **E** e **G** i punti medi di **CF** ed **FB**. (figura)



L’intuizione gli suggerisce che:

I) **P** è il punto medio di $\mathbf{MX_M}$.

II) Il triangolo **VBP**, inscritto nel segmento parabolico $\mathbf{S_p}= \widehat{VPB}$, è la quarta parte di **VBC**.

Dimostriamo queste due proprietà che la figura aiuta a visualizzare.

I)

In virtù della costruzione, per il *piccolo teorema di Talete* applicato al triangolo **VBC**, $\mathbf{X_M}$ è il punto medio di **VC**, quindi $\overline{VC}=2\overline{VX_M}$; inoltre $\overline{CB}=2\overline{MX_M}$ perché il segmento $\mathbf{MX_M}$ unisce i punti medi dei due lati **VB** e **VC** del triangolo **VBC**.

Per la proprietà **2)** della parabola: (#) $\overline{X_MP}:\overline{VX_M}^2=\overline{CB}:\overline{VC}^2$; ma (*) $\overline{CB}=2\overline{X_MM}$ e $\overline{VC}=2\overline{VX_M}^2$, da cui la (#) diventa $\overline{X_MP}:\overline{VX_M}^2=2\overline{X_MM}:4\overline{VX_M}^2$, cioè $\overline{X_MP}=\overline{X_MM}/2$, ossia $\overline{X_MP}=\overline{PM}$: **P** è così punto medio di $\overline{X_MM}$.

II) In virtù della costruzione (figura), i triangoli **VBP**, **PBF**, **FCP** e **PCV** sono equivalenti poiché hanno basi isometriche e altezze anch'esse isometriche; la loro unione forma **ABC**: allora la superficie del triangolo $\mathbf{T_0}$=**VBP**, inscritto in $\mathbf{S_p}$ è **1/4** di quella del triangolo **VBC**.

Entriamo nel vivo della *quadratura meccanica*.

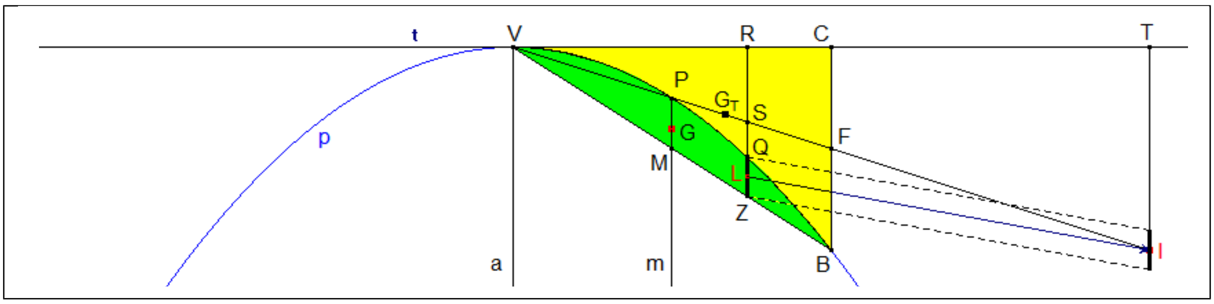
Nella proposizione **n.1** de Il Metodo Archimede espone il procedimento euristico mediante cui è pervenuto all'enunciato del teorema con un esperimento concettuale, cioè un procedimento ideale la cui metodologia sarà utilizzata mirabilmente da Galileo e fa ancora scuola.

Archimede immagina il segmento parabolico **VBP** e il triangolo **VBC** formati dall'insieme delle loro corde parallele all'asse della parabola e pone in equilibrio su una bilancia ideale i segmenti paralleli all'asse della parabola che "riempiono" il segmento parabolico e quelli che "esauriscono" il triangolo, allo stesso modo nel quale nella meccanica si mettono in equilibrio dei pesi, attribuendo ai segmenti pesi proporzionali alle loro lunghezze. (In effetti Archimede considera le corde come parallelogrammi con altezze infinitesime inscritti nel triangolo).

Preso un punto **Q** generico sull'arco di parabola $\widehat{VPB}$ tracciamo **QZ** ed **RZ** corde rispettivamente del segmento parabolico e del triangolo **VBC** parallele all'asse **a** (figura).

Indichiamo con **I** e **T** i simmetrici di **V** rispetto a **F** e **C** nell'ordine: $\overline{FI}=\overline{VF}$ e $\overline{CT}=\overline{VC}$.

Proseguendo la dimostrazione precedente, prova (la dimostrazione è in appendice) che $\overline{QZ}:\overline{RC}=\overline{RZ}:\overline{VC}$ (figura), la quale, essendo $\overline{CT}=\overline{VC}$, diventa: (#) $\overline{QZ}:\overline{RC}=\overline{RZ}:\overline{CT}$.



La (#), pensando **F** come fulcro, per la legge della leva assicura che $\overline{QZ}\cdot\overline{CT}=\overline{RZ}\cdot\overline{RC}$, quindi il "peso" **QZ** posto in **I** moltiplicato per il braccio $\overline{CT}$ equilibra il "peso" **QR** dove si trova, cioè in **S** suo centro di simmetria, moltiplicato per il braccio $\overline{RC}$.

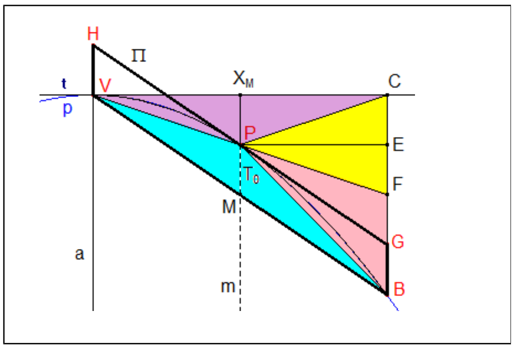
Di conseguenza il "peso" del segmento parabolico, collocato col suo centro di gravità in **I** farà equilibrio al"peso" del triangolo **ABC** posto nel proprio baricentro, che si trova su **AF** – mediana di **BC** – a distanza **d** da **F**, tale che **d=1/3** $\overline{AF}$. Allora il segmento parabolico ABN è equivalente a **1/3** del triangolo **ABC** quindi, per quanto provato, a **4/3** del triangolo **ABN**; indicati quindi con A_{Sp} l'area del primo e con A_T quella del secondo, abbiamo: $A_{Sp}=$ A_T.

Quadratura geometrica della parabola

Quello esposto però non è per la matematica greca, come dice lo stesso Archimede, un procedimento corretto, poiché presuppone la somma di infiniti segmenti –l'infinito in atto - e la matematica greca presenta quello che è stato definito "horror infiniti". Lo scienziato siciliano, con arditezza mentale straordinaria, lo utilizza si, ma come strumento euristico, e dimostra poi il risultato congetturato, col rigoroso metodo di esaustione. Architetta per ciò la successiva elegante costruzione geometrica per determinare figure note approssimanti il segmento parabolico.

Facciamo notare esplicitamente che Archimede ha uno stile ellittico, con riferimenti interni che riguardano proprietà "evidenti" – a suo dire – o imprecisati lavori precedenti. Per ciò riteniamo opportuno esporre in modo puntuale i troppo sintetici procedimenti del siracusano.

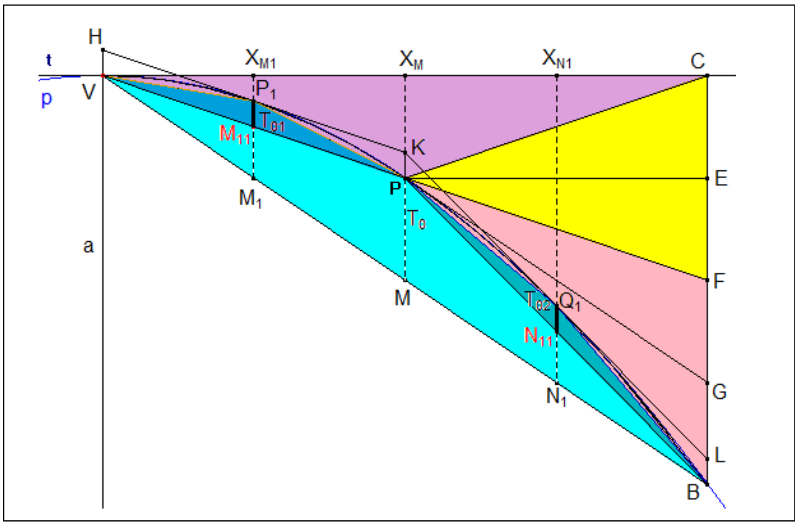
Riprendiamo il segmento parabolico S_P= VPB della nostra parabola **p**.



Indichiamo con **Π** il parallelogramma **VBGH** circoscritto a S_P; **HG** è parallelo alla corda **VB**, quindi tangente in **P** alla parabola in forza della proprietà **1)** del segmento parabolico.

Consideriamo il triangolo **VBP** - che chiamiamo T_0 - e il parallelogramma **Π**; poiché $\Pi=2T_0$ e $\Pi>S_p$, segue $2T_0> S_p$, cioè $T_0>S_p/2$. Allora, se sottraiamo a S_p il triangolo T_0, togliamo più della metà di S_P.

Chiamati poi M_1 ed N_1, nell'ordine i punti medi di **VM** ed **MB** e tracciate per essi le parallele all'asse, indichiamo con P_1 e Q_1 i loro punti d'incontro con **p**.



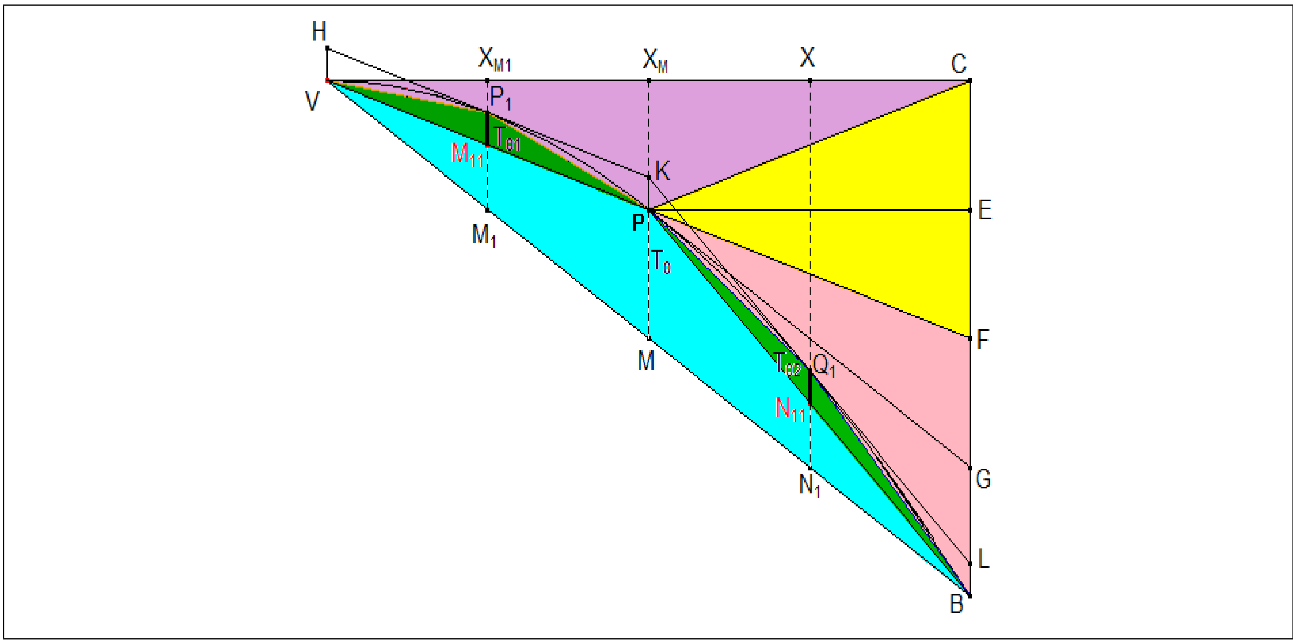
Denotiamo inoltre $\mathbf{X_{M1}}$ e $\mathbf{X_{N1}}$ i relativi punti comuni con **VC** e diciamo infine $\mathbf{M_{11}}$ e $\mathbf{N_{11}}$ le rispettive intersezioni con i segmenti **VP** e **PB**.
Poniamo $\mathbf{T_{01}=VPP_1}$ e $\mathbf{T_{02}=PBQ_1}$ e, consideriamo i parallelogrammi $\mathbf{\Pi_1}$= **VPKH** e $\mathbf{\Pi_2}$= **PBLK** a essi circoscritti.
Osserviamo innanzitutto che:

(a) <u>$\mathbf{\Pi_1}$ e $\mathbf{\Pi_2}$ sono equivalenti</u> perché hanno stessa base **PK** e altezze rispettivamente i segmenti $\mathbf{VX_M}$ e $\mathbf{X_MC}$ isometrici perché metà di **VC**.

(b) <u>I triangoli $\mathbf{T_{01}}$ e $\mathbf{T_{02}}$ sono equivalenti poiché metà di $\mathbf{\Pi_1}$ e $\mathbf{\Pi_2}$</u>.

Esaminiamo adesso i segmenti parabolici $S_{P_1} = V\widehat{P_1}P$ e $S_{P_2} = P\widehat{Q_1}B$ e procediamo in modo analogo a quello precedente (figura sopra).
La superficie $\mathbf{\Pi_1}$ circoscritto a $\mathbf{T_{01}}$, ha superficie doppia di questo e $\mathbf{\Pi_1=2T_{01}}$; ma $\mathbf{\Pi_1}> S_{P_1}$, quindi $\mathbf{2T_{01}}> S_{P_1}$, cioè $\mathbf{T_{01}}> S_{P_1}/2$. Analogamente, chiamato S_{P_2} il segmento parabolico $A\widehat{Q_1}V$, $\mathbf{\Pi_2}$ circoscritto a $\mathbf{T_{02}}$, possiede superficie doppia di questo: $\mathbf{\Pi_2=2T_{02}}$ e quindi $\mathbf{2T_{02}}> S_{P_2}$, ossia $\mathbf{T_{02}}> S_{P_2}/2$. Allora se togliamo all'area $S_{P_1} + S_{P_2}$ la somma delle aree di $\mathbf{T_{01}}$ e $\mathbf{T_{02}}$ sottraiamo più della sua metà.
Per la proprietà di esaustione, eseguendo il precedente procedimento un numero sufficientemente grande di volte, otteniamo che la differenza tra l'area del segmento parabolico $\mathbf{S_p}$ e la somma delle aree dei triangoli via via costruiti diventa minore di qualsiasi area assegnata, *per quanto piccola*: abbiamo così costruito un poligono che *approssima* il segmento parabolico.

Archimede a questo punto calcola le superfici (noi le aree) dei triangoli così ottenuti.
Fissiamo ora la nostra attenzione sui triangolini <u>$\mathbf{T_{01}}$ e $\mathbf{T_{02}}$</u> che per **(b)** <u>sono equivalenti</u>.
Notiamo innanzitutto che **(c)** <u>i triangoli **VMP** ed **MBP** sono equivalenti a $\mathbf{VPX_M}$</u>, poiché hanno basi **MP** e $\mathbf{PX_M}$ isometriche e altezze $\mathbf{VX_M}$ e $\mathbf{X_MC}$ anch'esse isometriche.
Possiamo a questo punto ripetere per $\mathbf{T_{01}}$ le considerazioni fatte per $\mathbf{T_0}$.
Come $\mathbf{T_0=\frac{1}{4}VBC}$, così $\mathbf{T_{01}=\frac{1}{4}\ VPX_M}$, cioè $\mathbf{T_{01}=\frac{1}{4}\ VMP}$ $=\frac{1}{4}$ **MBP**; ed essendo $\mathbf{T_{02}}$ equivalente a $\mathbf{T_{01}}$, $\mathbf{T_1= T_{01}+T_{02}= \frac{1}{4}T_0}$, quindi, in definitiva: $\mathbf{T_1=\frac{1}{4}T_0}$.
Se consideriamo ora i punti medi $\mathbf{M_2}$ di $\mathbf{VM_1}$ ed $\mathbf{N_2}$ di $\mathbf{MN_1}$, con argomentazioni analoghe a quelle utilizzate, otteniamo triangolini che approssimano di più l'arco di segmento parabolico e, detta $\mathbf{T_2}$ la loro somma: $\mathbf{T_2=\frac{1}{4}T_1=(\frac{1}{4})^2\ T_0}$; proseguendo avremo dopo **n** suddivisioni triangolini che approssimano sempre più l'arco di segmento parabolico e la cui somma è $\mathbf{T_n=(\frac{1}{4})^nT_0}$.



Consideriamo ora il poligono:

P=$\mathbf{T_0}$+$\mathbf{T_1}$+$\mathbf{T_2}$+……..+$\mathbf{T_{n-1}}$+$\mathbf{T_n}$ che, per quello che abbiamo trovato, possiamo scrivere: **P**= $T_0 + \frac{1}{4}T_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 T_0 + \ldots\ldots\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} T_0 + \left(\frac{1}{4}T_0\right)^n$ = T_0 $\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\ldots\ldots\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$.

In parentesi quadra troviamo una progressione geometrica di **n+1** termini di ragione **q=1/4**, la cui somma, come sappiamo, risulta:

$$\mathbf{S}= \frac{1-1/4^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1-1/4^{n+1}}{3/4} = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{n+1}}\right) = \frac{4}{3}-\frac{4}{3}\frac{1}{4^{n+1}} = \frac{4}{3}-\frac{1}{3}\frac{1}{4^n} \;;$$

quindi: **P**=T_0 $\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\frac{1}{4^n}\right) = \frac{4}{3}T_0 - \frac{1}{3}\frac{T_0}{4^n}$, cioè **(1) P** = $\frac{4}{3}T_0 - \frac{1}{3}\frac{T_0}{4^n}$.

A questo punto noi diremmo: poiché per n→∞ $\frac{T_0}{3*4^n}$ →0, allora **P** tende a T_0.

Come abbiamo già detto però, questo per i matematici greci era… "blasfemo". Archimede allora, intuito che il segmento parabolico vale **Σ=** T_0 , procede con la doppia riduzione all'assurdo.

Primo caso.

Supponiamo **Σ >** $\mathbf{T_0}$; allora **Φ= Σ-** $\mathbf{T_0}$ è un superficie esistente, cioè per noi, presenta area diversa da zero, *per quanto piccola*.

Consideriamo ora il poligono **P**=$\mathbf{T_0}$+$\mathbf{T_1}$+$\mathbf{T_2}$+……..+$\mathbf{T_{n-1}}$+$\mathbf{T_n}$, per l'assioma di Eudosso-Archimede **ν** N tale che **νΦ>K**, qualunque sia la superficie **K** con area diversa da zero. Allora, se scegliamo **K** = **ν(Σ-P)**, si ha che per **n=ν**: **νΦ >** **ν(Σ-P)**, cioè **Φ>(Σ-P),** ossia **Σ-** $\frac{4}{3}T_0$ **>Σ-P**, da cui **P>** $\frac{4}{3}T_0$. Ciò è assurdo poiché **P<** $\frac{4}{3}T_0$, essendo **P** un poligono inscritto nel segmento parabolico.

Secondo caso.

Supponiamo ora **Σ <** **T_0**; in questo caso, poniamo **(2) Ψ=** **T_0- Σ**: **Ψ** possiede area non nulla, *per quanto piccola*. Dalla **(2) Σ=** T_0-**Ψ**.

Per l'assioma di Eudosso-Archimede **μ** **N** tale che **μΨ>H**, per qualunque superficie **H** esistente. Scelta allora **H=μ** $\frac{T_0}{4^n}$, si ha **μΨ>μ** $\frac{T_0}{4^n}$, cioè **Ψ>** $\frac{T_0}{4^n}$ quindi, a più forte ragione, (*) **Ψ>** $\frac{T_0}{4^n}$ - $\frac{1}{3}\frac{T_0}{4^n}$; ma dalla **(1) P=** $\frac{4}{3}T_0 - \frac{1}{3}\frac{T_0}{4^n}$, ed essendo $\frac{4}{3}T_0 > \frac{T_0}{4^n}$, si ha (*) **Ψ>P**, cioè $\frac{4}{3}T_0$ **- Σ>** $\frac{4}{3}T_0$ **- P** e di conseguenza **Σ<P**: questo è assurdo poiché il poligono **P** è inscritto in **Σ**.

Non potendo essere **Σ<** T_0 né **Σ>** T_0, per la proprietà di tricotomia è **Σ=** T_0.

APPENDICE

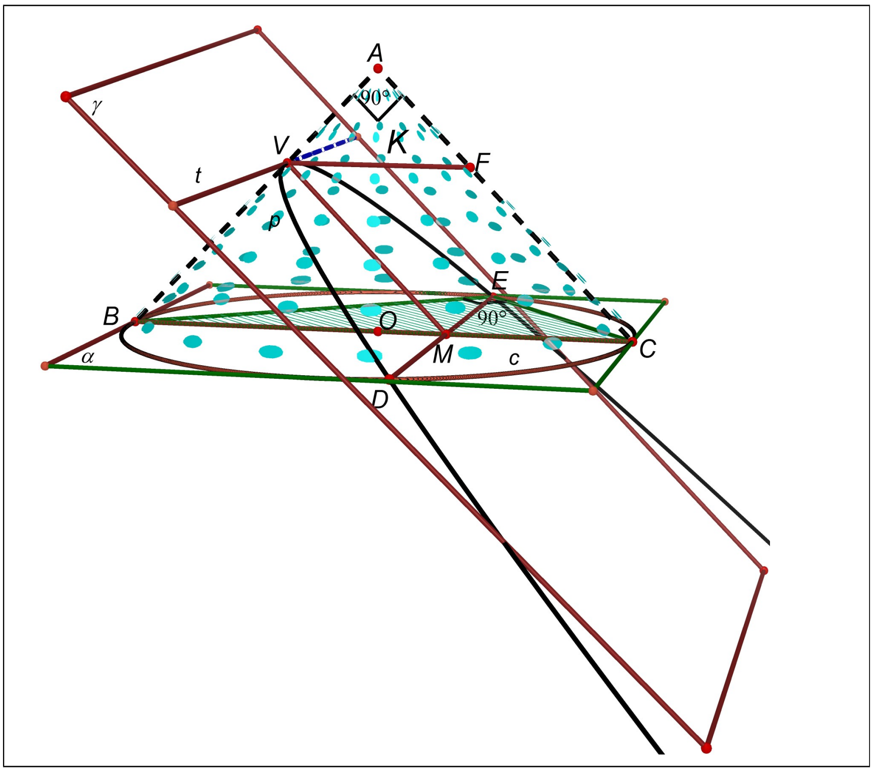
[Dai triangoli simili ABC e AQR si ha BC:QR=AC:AR, o anche (3) $BC^2:QR^2=AC^2:AR^2$ mentre dalla proprietà della parabola (4) $BC:PR=AC^2:AR^2$; da (3) e (4) $BC^2:QR^2=BC:PR$, ossia $BC:QR^2=1:PR$, o ancora QR:PR=BC:QR, cioè QR:PR=AC:AR. Applicando lo scomponendo (QR-PR):QR=(AC-AR):AC o anche PQ:QR=RC:AC, che si può scrivere (5) PQ:RC=QR:AC, cioè infine PQ:RC=QR:CH].

[Consideriamo un cono circolare retta **K** di vertice **A** e asse **a**, e sechiamolo col piano **α** perpendicolare ad **a** per un punto **O** di questo. Diciamo **BC** un diametro della circonferenza sezione **c** e, assegnato un punto **V** su **AB** come in figura (o **AC**), consideriamo il piano **γ** per **V** perpendicolare ad **AB** e denotiamo con **t** la retta di **γ** per **V** perpendicolare a **VM** e con **p** la curva sezione del cono **K** con **γ**: definiamo **parabola** la curva **p** determinata.

La curva **p** interseca **c** in **D** ed **E**, con **DE** perpendicolare **BC** di cui sia **M** il punto medio.

Osservazioni:

- la distanza di **E** da **t** è uguale a quella di **M** da **V**: **d(E,t)=** $\overline{MV}$;
- la distanza di E dall'asse a è uguale a da M: **d(E,a)=** $\overline{EM}$.



.

Il triangolo **BEC** rettangolo in **E** perché inscritto nella semicirconferenza $B\overset{\frown}{E}C$, quindi, per il cosiddetto secondo teorema di Euclide, si ha $\overline{BM} : \overline{ME} = \overline{ME} : \overline{MC}$, cioè $\overline{ME}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{MC}$, da cui: (1) $\overline{BM} = \dfrac{\overline{ME}^2}{\overline{MC}}$.

Dai triangoli **BMV** e **ABC**, omotetici per costruzione, (2) $\dfrac{\overline{VM}}{\overline{BM}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$; sostituendo quanto ottenuto dalla (1), si ha $\dfrac{\overline{VM}}{\overline{ME}^2}\overline{MC} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ da cui (3) $\dfrac{\overline{VM}}{\overline{ME}^2} = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{MC}}{\overline{BC}}$.

La (3), essendo $\overline{VF} = \overline{MC}$ perché lati opposti del parallelogramma **VMCF**, diventa:

$$(*) \qquad \frac{\overline{VM}}{\overline{ME}^2} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{MC}}{\overline{BC}} \quad .$$

nella (*) $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ sono costanti e, fissato **V** su **AB**, è costante anche $\overline{MC} = \overline{VF}$; allora (#) $\frac{\overline{VM}}{\overline{ME}^2} =$ costante: detta **a** la costante si ha infine:

$$(**) \qquad \frac{\overline{VM}}{\overline{ME}^2} = \mathbf{a}, \text{ o anche } \quad \overline{VM} = a\cdot\overline{ME}^2 \quad ;$$

La (**), in forza delle osservazioni precedenti, esprime una la proprietà intrinseca, caratteristica della parabola, nella quale dunque:
È costante il rapporto fra la distanza di un generico punto P dalla tangente nel vertice e il quadrato della sua distanza dall'asse.

Osservazione

Se, se nel piano **γ** che contiene la parabola consideriamo un sistema di riferimento di origine **V**, asse **x≡t** e asse **y≡VM**, la $\overline{VM} = a\cdot\overline{ME}^2$ si trasforma nell'equazione canonica della parabola $\mathbf{y=ax^2}$.
L'equazione ottenuta è semplice *solo* nel nostro particolare riferimento, mentre la proprietà geometrica vale comunque.