Lettera ai gentili colleghi di Matematica e Fisica.

REALI E CONTINUO: SIC ET SIMPLICITER?
Numeri iperreali e Analisi Non Standard

Estensione degli insiemi numerici

L'estensione degli insiemi numerici è stata una costante della storia della matematica. Infatti, si è passati da N ai razionali assoluti, poi a Z e a Q, quindi a R e infine a C. E spesso i nuovi "oggetti numerici" sono stati osteggiati o hanno comportato difficoltà di accettazione. Ciò è attestato da alcuni fatti storici. In Cina e India i numeri negativi - legati a debiti e crediti – sono presenti già poco dopo il 200 a. C., mentre Diofanto (III secolo d.C. e al-Khwārizmī (IX secolo d.C.) - il "padre dell'algebra" - che si attenevano ai modelli geometrici di Euclide, li consideravano "numeri assurdi". Per quanto concerne i numeri irrazionali, a parte il trauma causato dalla loro scoperta nel IV a.C. sulla cultura filosofico-scientifica greca, Stifel, intorno al 1500, scriveva: "Proprio come un numero infinito non è un numero, così un numero irrazionale non è un vero numero". Ma essi vennero comunque utilizzati malgrado non ce ne fosse una definizione rigorosa. E, anche Eulero (1707-1783) li considerava tali.
Veniamo ai numeri complessi. Si sono presentati da soli, a Cardano prima e a Bombelli dopo, nella seconda metà del Cinquecento, nell'applicare le formule risolutive per mezzo di radicali delle equazioni algebriche generali di secondo e terzo grado. Furono chiamati da Bombelli numeri "silvestri" e da Cartesio numeri "immaginari". Hanno trovato, inaspettatamente, straordinarie applicazioni, oltre che in matematica anche in fisica e ingegneria (a esempio, in fluidodinamica, elettromagnetismo e relatività).

Numeri naturali, N.

Esponiamo la "sistemazione" di **Peano** fondata su tre concetti assunti come primitivi: quelli di *numero naturale*, di *zero* e di *successivo* (se n è un numero naturale, n+ indica il successivo di n).
Stabilito che «numero naturale» è il nome di una classe, cioè $N_0 \in Cls$, Peano formula cinque assiomi che dànno l'identikit delle idee primitive.

1. Zero è un numero naturale: $0 \in N_0$.
2. Se n è un numero naturale, il successivo di n è un numero naturale, cioè il successivo di un numero naturale è un numero naturale: $n \in N_0 \Rightarrow n+ \in N_0$.
3. Se P è una proprietà, e zero gode di questa proprietà; se ogni volta che un numero naturale ha questa proprietà, anche il suo successivo ha tale proprietà; allora ogni numero naturale gode della proprietà considerata: $P \in Cls$.
4. Due numeri naturali sono uguali se sono uguali i loro successivi: $m, n \in N_0$ e $m+=n+ \Rightarrow m=n$.
5. Il successivo di un numero naturale non è mai uguale a zero: $\forall\ n \in N_0 \Rightarrow n+\neq 0$.

Sembrava che questa sistemazione caratterizzasse i numeri naturali, ma **B**. **Russell** provò poco dopo che:
ogni progressione, con opportune convenzioni sul significato dei termini «zero», «numero», «successivo», soddisfa i cinque assiomi di Peano. E T. **Skolem** rese vana ogni speranza del genere; provò infatti che:
non si riuscirà mai a caratterizzare i numeri naturali con un gruppo finito di assiomi.

Numeri razionali

Il campo dei numeri razionali **Q** è *ordinato*, *archimedeo* e *denso*, ma G. Cantor ha dimostrato che è equipotente all'insieme dei numeri naturali **N**. Anche se, per provarlo ha dovuto ordinare i numeri razionali **non** in ordine di grandezza (non si può perché, essendo **Q** denso non esiste il successivo di un numero razionale). La novità si ottiene elevandosi dai numeri razionali a quelli reali; con essi infatti si esce dal *numerabile* per entrare nel cosiddetto *continuo*. Con **Weierstrass** i numeri reali costituiscono la base effettiva dell'Analisi infinitesimale.

Numeri reali

Ci occuperemo delle definizioni di G. Cantor e R. Dedekind (le altre sono delle loro varianti).
Teoria di **Cantor** (Come si svolge solitamente).
Definizioni
Due sottoinsiemi A e B di **Q** non vuoti si dicono *separati* se $\forall a \in A < \forall b \in B$.

Ogni numero razionale **q** tale che $\forall a \in A \leq q \leq \forall b \in B$ si dice elemento di separazione di A e B.
Due sottoinsiemi A e B di **Q** non vuoti si dicono *contigui* se:

- Sono separati, cioè $\forall a \in A < \forall b \in B$.
- $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \bar{b} \in B$ e $\bar{a} \in A$ tali che $\bar{b}-\bar{a}<\varepsilon$ (Proprietà dell'avvicinamento indefinito).

Assioma di Cantor
Ogni coppia d'insiemi separati di **Q** ammette almeno un elemento separatore, ξ, cioè tale che:

$$\forall\ \mathbf{a} \leq \xi \leq \mathbf{b}.$$

L'assioma permette di provare che:

Ogni coppia di classi contigue ammette uno e **un solo** elemento separatore.

Se l'elemento separatore **non** è razionale, diciamo che s'individua il nuovo "oggetto matematico". Cantor dimostra che tali "oggetti matematici" si possono confrontare, addizionare, moltiplicare come i numeri razionali; quindi essi acquisiscono la dignità di numeri, detti **irrazionali**, il cui insieme chiamiamo **I**.

R=Q ∪ **I** è definito insieme dei **numeri reali**.

Si prova inoltre che esiste un sottoinsieme di **R** in corrispondenza biunivoca, simile[1] e isomorfa[2] con l'insieme dei numeri razionali **Q**. E questa è una conclusione molto importante perché consente di provare che l'operazione di limite, applicata al campo dei numeri reali, è interna a esso, in altre parole:

il campo dei numeri reali è *chiuso* rispetto all'operazione di limite.

Teoria di **Dedekind**.
Assioma di Dedekind
Supponiamo di avere diviso l'insieme dei numeri razionali **Q** in due sotto insiemi A e B tali che:

1. A e B siano non vuoti.
2. Ogni numero di A sia minore di ogni numero di B.
3. Di ogni numero razionale risulti univocamente stabilito se appartiene ad A ovvero a B.

Allora esiste un **solo** numero **s** che separa i due insiemi A e B, cioè, tale che:

$$\forall\ \mathbf{a} \in \mathbf{A}\ \wedge\ \forall\ \mathbf{b} \in \mathbf{B},\ \mathbf{a} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{b}.$$

Tale suddivisione si dice «partizione» di **Q**; essa viene indicata con (A/B).
Se l'elemento separatore **non** è razionale, diciamo che s'individua il nuovo "oggetto matematico".
Quindi Dedekind dà la definizione:

chiamiamo numero reale l'elemento separatore di ogni partizione del campo razionale.

Anche per questi "oggetti matematici" si dimostra che è possibile stabilire uguaglianza, disuguaglianza, somma e prodotto in modo tale che valgono le proprietà formali come nell'aritmetica razionale. Gli elementi separatori che **non** sono razionali sono detti **numeri irrazionali**, e il loro insieme è indicato con **I**.

R=Q ∪ **I** è definito insieme dei **numeri reali**.

Si prova inoltre che esiste un sottoinsieme di **R** in corrispondenza biunivoca, simile e isomorfa con l'insieme dei numeri razionali **Q**. E ciò è significativo perché permette di provare che l'operazione di limite, applicata al campo dei numeri reali, è interna a esso, in altre parole:

il campo dei numeri reali è *chiuso* rispetto all'operazione di limite.

Continuo

Anche l'assioma di continuità della retta presenta due diverse formulazioni nelle teorie di Cantor e Dedekind.

Assioma di Cantor.
Siano date, sopra una retta *r* orientata, due classi C e C' di punti tali che:

1. Ogni punto di C preceda ciascun punto di C' (secondo il verso positivo assegnato).
2. Scelto comunque un segmento ε, si possano trovare un punto K di C e uno di K' di C' tali che il segmento KK' sia minore di ε.

Allora esiste su *r* **un solo** punto di separazione delle due classi.
L'assioma permette di provare che:

Ogni coppia di classi contigue di punti ammette **un solo** elemento separatore.

---

1. Una corrispondenza tra classi si dice simile se conserva l'uguaglianza e la disuguaglianza, quindi l'ordinamento.
2. Una corrispondenza tra classi si dice isomorfa se, applicando le operazioni fondamentali a due qualsiasi numeri di una e ai corrispondenti nell'altra, si ottengono numeri tra loro corrispondenti.

Assioma di Dedekind

Se i punti di una retta orientata *r* vengono ripartiti in due classi A e B tali che:

1. Nessuna di esse sia vuota.
2. Ogni punto della retta appartenga o all'una o all'altra delle due.
3. Ogni punto della classe A preceda (secondo il senso fissato sulla retta) ciascun punto della classe B.

Allora, esiste sulla retta *r* uno e **un solo** punto di separazione delle due classi, che, a seconda dei casi, potrà appartenere ad A *aut* a B.

Indicheremo con (A\B) la partizione eseguita.

Ebbene, si dimostra che le due enunciazioni originano due insiemi in corrispondenza biunivoca, simile e isomorfa. Sembrerebbe che si possa concludere che i due assiomi sono equivalenti: questa conclusione è falsa! Infatti, l'assioma di Dedekind contiene in sé quello di Eudosso-Archimede, dunque: è impossibile negare la suddetta proprietà quando si accetta l'assioma di Dedekind.

Questa impossibilità **non** si verifica per l'assioma di Cantor. Infatti, G. Veronese nel 1890, e, alcuni anni dopo D. Hilbert, hanno costruito insiemi ordinati di punti continui nel senso di Cantor ma che non soddisfano l'assioma di Eudosso-Archimede: sono i «continui non archimedei». Inoltre, nel 1893, T. Levi-Civita presenta del continuo l'evoluzione in chiave algebrica, occupandosi degli stessi oggetti da un punto di vista meramente analitico.

Scendendo più in dettaglio nella fattispecie della geometria non-archimedea, quando ci si sofferma sull'osservazione diretta, per due segmenti rettilinei l'assioma di Archimede è verificato, ma quando proviamo ad estenderlo allo spazio illimitato, la validità non è giustificata allo stesso modo. L'assioma di Archimede ha una natura empirica, dettata dalla nostra intuizione che ci fa vedere tutti gli oggetti come raggiungibili. Quando idealizziamo dei segmenti che non si possono osservare, fatti di altri punti oltre agli estremi, non ci sono dati osservativi e non c'è un'intuizione che ci spinge a considerarli validi. E siccome un segmento infinitesimo svanisce nel nulla rispetto ad un segmento finito, «…se anche esistesse fisicamente un tale segmento, noi non potremmo vederlo».

La nostra capacità percettiva degli oggetti, in tal senso ha già in sé la possibilità di poterli afferrare e raggiungerli, dunque la validità dell'assioma di Eudosso-Archimede è in un certo senso una premessa delle nostre facoltà sensoriali. Per questa ragione l'intuizione spaziale ci suggerisce, come avevano colto già i primi geometri della storia, che tutte le grandezze fisiche che possiamo considerare a livello empirico sono perciò esse stesse grandezze archimedee: né infinite, né infinitesime. Ma non per questo la nostra intuizione si ferma ai dati empirici, con la capacità d'astrazione che generalizza globalmente proprietà intuite localmente. Se dunque non imponiamo aprioristicamente la validità dell'assioma archimedeo, la geometria che ne scaturisce rispetta l'intuizione spaziale «[…] e quindi il suo contenuto è geometricamente giustificato» (Veronese, 1909).

Con i contributi di Veronese-Hilbert-Dehn-Hahn, il percorso logico delle geometrie non-archimedee è completo, con la dimostrazione esplicita della sua consistenza.

Si è convenuto allora che:

Un insieme **I** si dice continuo se **ogni sua partizione** soddisfa le condizioni di Dedekind.

È chiaro allora che numeri reali e continuità presentano criticità.

Difficoltà del concetto di limite

Nello studio dell'analisi infinitesimale il concetto in cui gli studenti trovano le maggiori difficoltà, molte, è certamente quello di limite di una funzione, che però è fondamentale per tutta la trattazione.

Sono pochi i giovani che ne colgono a pieno il significato, mentre la maggior parte l'impara a memoria, senza alcun profitto. Ciò è dovuto, in parte alla sua definizione, ostica e tutt'altro che intuitiva, in parte al fatto che noi insegnanti, di norma, prendiamo l'avvio, seguendo i libri di testo, da quello più complicato $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, e anche alla complessità intrinseca della nozione.

Diverse sono le ricerche didattiche incentrate sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite. La letteratura in merito prospetta:

- Ostacoli epistemologici:

Brousseau, 1976 *Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathématiques*; Sierpinska, 1985 *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*; B. Cornu, 1991, *Apprentissage de la notion de limite. Conception et obstacle*.

- Difficoltà connesse a scelte didattiche:
  Furinghetti e Somaglia, 1994 *Uno studio longitudinale sulla funzione*; I. Dimarakis e A.Gagatsis, 1997 *Alcune difficoltà nella comprensione del concetto di limite*; e altri.

Inoltre, è opportuno evidenziare che la definizione di limite è controintuitiva. Infatti, mentre nella definizione di funzione si prendono le mosse dalla variabile indipendente per ottenere i corrispondenti valori della variabile dipendente, nella definizione di limite si procede in senso inverso: si parte da un intorno del limite cui tende la funzione e si determina in corrispondenza l'intorno del valore x_0 della variabile dipendente, finito o meno, i cui elementi soddisfano la condizione del limite.
Infine, ma non per ultimo, la definizione di limite non è "costruttiva": non consente di trovare il limite, ma solo di verificare le condizioni, soddisfatte le quali esso esiste.
Da quanto precede si evince che i numeri reali e il continuo presentano diverse criticità.

Numeri iperreali e Analisi Non Standard

Nel 1966 A. Robinson, in *Non-standard analisys*, riprende le straordinarie intuizioni di Leibniz e Newton, i geniali ideatori del calcolo infinitesimale, e dà loro l'assetto rigoroso che mancava, utilizzando però un'architettura matematica ponderosa. Nel 1976 J. Keisler, in *Elementary calculus* e *Foundations of Infinitesimal Calculus*, rende accessibili i concetti di numeri infinitesimi e numeri infiniti e le loro proprietà, utilizzato solo pochi chiari assiomi. Da allora, l'Analisi Non Standard ha cominciato a farsi strada in diverse Università e Istituzioni matematiche.

L'introduzione dei numeri iperreali e dell'Analisi Non Standard (ANS) ha sostenitori e detrattori, questi ultimi in numero maggiore, forse? per…istinto di conservazione.
In questo mio contributo desidero sottolineare alcuni aspetti dell'esposizione tradizionale, che spesso trascuriamo, e che evidenziano diverse criticità sia sulla trattazione dei numeri reali che del continuo. Inoltre, evidenzio che l'ANS:

1. Ha solide fondamenta (lo vedremo tra breve) ed è più semplice e intuitiva; infatti, l'uso di infinitesimi e infiniti riduce limiti, continuità, derivazione e integrazione a facili calcoli numerici.
2. Consente da subito di manipolare numeri infinitesimi e infiniti, di cogliere il significato del concetto di limite che risulta vicino alla nostra intuizione e al modo in cui si opera in tale senso in Fisica (e, lungi dalle molteplici e pesanti definizioni della trattazione standard, si può ottenere col semplice calcolo della *parte standard* per i *numeri iperreali finiti* e con i *numeri infiniti*).
3. Permette d'introdurre presto, mediante il calcolo della parte standard, le derivate senza introdurre la continuità; ciò consente di acquisire familiarità con esse che è molto utile. È così possibile determinare facilmente l'equazione della tangente alla curva che rappresenta una funzione e avviarne lo studio, anche se in modo non esaustivo.

Riguardo alla solidità dei fondamenti dell'ANS sono significative le successive argomentazioni del Professore R. Dossena, che ho trascritto con qualche piccola variazione che non ne altera minimamente il contenuto.
«Prendiamo come punto di partenza il sistema dei numeri reali R che chiameremo Universo Standard e il calcolo differenziale di di Weierstrass (o Analisi Standard).
Designiamo con L il linguaggio formale in cui parliamo di R e con K l'insieme di tutte le **fbf** (formule ben formate o proposizioni) **vere** di **L**. Dicendo che R è un modello di K intendiamo che R è una struttura matematica tale che ogni proposizione di K interpretata come riferentesi a R è vera. Una conseguenza di un celebre Teorema di Gödel (che richiameremo fra poco) è l'esistenza di un universo non-standard R^*, differente da R, che è pure un modello di K (un modello non-standard, appunto): R^* è una struttura matematica tale per cui ogni proposizione di K interpretata come riferentesi a R^* è vera. A esempio consideriamo la seguente proposizione: se $a < b$, allora $a + c < b + c$. Prendendo per buono il fatto che essa è una proposizione dell'insieme K, se viene riferita a R allora a, b e c sono numeri reali, la relazione "<" è l'usuale relazione d'ordine stretto e la proposizione risulta vera. Se essa è riferita invece a R^* gli elementi a, b

e c sono oggetti propri di R^* e con un'opportuna interpretazione di "<" la proposizione rimane comunque vera. Un altro fatto interessante è che R^* risulta essere un campo ordinato più ampio di R e inoltre risulta contenere una sotto-struttura esattamente identificabile con R (isomorfa a R). Possiamo ancora chiamare R tale sotto-struttura così come possiamo denotare i suoi elementi con gli usuali nomi dei numeri reali (ad es. l'elemento corrispondente a 5 nella nuova struttura viene chiamato sempre 5) e continuare a lavorare con essa come se fosse proprio l'antico R. Possiamo dunque affermare che R^* contiene R e in più altri oggetti fra cui, guarda caso, i famigerati infinitesimi. R^* viene chiamato sistema dei numeri iperreali e su di esso si fonda l'Analisi Non-Standard.
Gli iperreali, come aveva ipotizzato Leibniz, godono delle stesse proprietà formali dei numeri reali (o numeri standard) o meglio godono delle stesse proprietà che possono essere espresse nel linguaggio formale **L**.
Un numero iperreale infinitesimo - sia ε - è un numero il cui valore assoluto è positivo, eppure minore di qualunque numero reale positivo: $|\varepsilon| < r \ \forall \ r \in R^+$. Pertanto esso è un numero non-archimedeo (non soddisfa l'assioma di Eudosso-Archimede). Allora la proprietà archimedea non è esprimibile nel linguaggio formale **L** e non può essere trasferita a tutti gli oggetti di R^*.
L'esistenza di "strani" numeri non contemplati dall'aritmetica usuale fu scoperta per la prima volta nel 1934 dal logico norvegese T. **Skolem** che costruì un modello non-standard dei numeri naturali. Successivamente questa costruzione fu ampliata fino ad arrivare, con **A. Robinson** nel 1966, al campo dei numeri iperreali (il termine "iperreale" è dovuto ad **Edwin Hewitt** in un articolo del 1948.
La geniale intuizione di A. Robinson fu quella di utilizzare gli infinitesimi per riformulare l'Analisi Matematica. Ripercorriamo questa ricostruzione partendo dal Teorema di completezza di **Gödel**:
Teorema di completezza
Un insieme di proposizioni è logicamente coerente o consistente (nessuna contraddizione può essere dedotta da esso) se e solo se esso ha un modello, cioè se e solo se esiste un universo in cui esse sono tutte vere.
Accanto al Teorema di completezza abbiamo l'importante teorema dovuto a **M. Henkin**:
Teorema di compattezza
Sia **P** un insieme di proposizioni di un linguaggio formale **L.**
Se nell'universo standard ogni sottoinsieme finito di **P** è vero, allora *esiste un universo non-standard* in cui tutte le proposizioni di **P** sono vere.

Critiche alla concezione di continuo

Contro la concezione del continuo esposta si sono levate, già all'inizio del Novecento, alcune gravi obiezioni.
Essa prende le mosse da un insieme ordinato **I** (nel caso della retta un insieme di punti); cioè suppone già dati i punti, ammette che gli elementi di **I** formano, per così dire, il materiale da cui è fabbricato **I**. Solo in seguito essa giunge all'idea della continuità, come idea definibile attraverso certe proprietà degli elementi di **I**.
Successivamente, L. Brower, H. Weyl, R. Fisher e altri espressero significative riserve su questa concezione del continuo: «*il continuo che così otteniamo non è quello geometrico; è un continuo artefatto, un continuo aritmetico, o meglio atomistico*», perché ricavato dagli elementi di I, pensati come elementi primitivi (ossia, in un certo modo, come atomi della vecchia tradizione pitagorica). Ma, la concezione pitagorica non può che travisare l'intuizione originaria del continuo. In questa intuizione il continuo si rivela, invece, come qualcosa di irriducibile al punto, secondo quello che aveva scritto molto bene Anassagora (499-428 a.C.):
Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è, cessi di essere per divisione». Mentre rispetto all'infinito afferma: «Così vi è sempre qualcosa di più grande di ciò che è grande.
Giustapponendo gli uni agli altri dei pretesi elementi ultimi, indivisibili, non si ottiene il continuo: giustapponendo gli uni agli altri dei punti privi di estensione non si ottiene alcun segmento esteso.
La struttura del continuo può venire intesa, non partendo dai punti, ma dal continuo stesso; tenendo cioè presente quest'importantissimo fatto, che: dividendo un segmento in un numero grande quanto si vuole di parti, si ottiene sempre ancora un segmento, a sua volta divisibile a volontà. I pretesi punti indivisibili sono soltanto segni divisori tra un segmento e l'altro, non sono gli elementi costitutivi del continuo, come aveva già evidenziato Leibniz scrivendo sul *labirinto del continuo* sosteneva che i punti matematici sono mere modalità, non «parti dello spazio»; *le parti di una distanza sono altre distanze minori*. Spazio e tempo non

vanno - secondo lui – confusi con le sostanze; quando si afferma che una sostanza è l'aggregato di certe sostanze individuali che la compongono, bisogna intendere che l'aggregato è logicamente susseguente agli elementi componenti. Quando invece si afferma che un determinato spazio o un determinato tempo può venire diviso in parti, bisogna intendere che il tutto precede logicamente le parti in cui lo dividiamo. Vi è in Leibniz una chiara visione del carattere matematico del problema del continuo, assolutamente inconfondibile con il problema della composizione fisica della materia. E, la posizione "intuizionista" di L. Brower, sostenuta da H. Weyl, consiste nel considerare il «continuo» come concetto originario, e invece il «punto» come concetto derivato. I punti «si estraggono» dal continuo, non lo costituiscono.

La posizione di Brower comporta la rinuncia al Principio del terzo escluso.

Struttura continua e potenza del continuo

È stato dimostrato che:

sopprimendo da un insieme continuo C un'infinità numerabile K, l'insieme restante R possiede ancora la potenza del continuo. E Cantor, nel 1873 ha provato che *i numeri trascendenti formano una insieme avente la potenza del continuo*, dimostrando che i numeri algebrici formano un'infinità numerabile.

Ciò però non significa che l'insieme *R* sia continuo nel senso dell'ordinamento. Infatti, detto **I** l'insieme dei numeri irrazionali, **I** ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri reali **R**, cioè del continuo, ma non è continuo rispetto all'ordinamento, perché presenta infiniti "buchi": tra gli irrazionali negativi e quelli positivi si trova, a esempio, il buco razionale dello zero.

Questo risultato può servire per illustrare la differenza tra «struttura continua» e «potenza del continuo».

I concetti sviluppati ci permettono di compiere un ulteriore passo nella costruzione dei numeri reali, con speciale riguardo al delicatissimo problema del significato della loro esistenza.

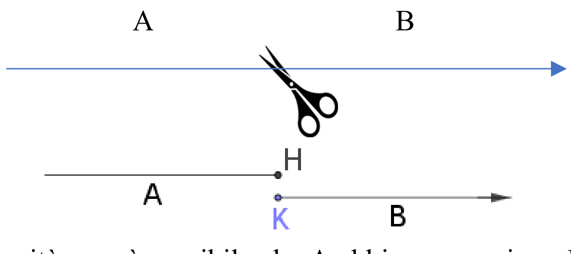
Conosciamo alcuni numeri irrazionali: π, *e. log(2),* $2^{\sqrt{2}}$, etc. Da ciascuno di questi, per esempio addizionandolo o moltiplicandolo con un numero algebrico, possiamo ottenere due infinità di numeri trascendenti che riunite non ci fanno però uscire dal numerabile. Resta così aperto il problema: in qual senso parleremo degli altri infiniti numeri trascendenti che non siamo in grado di costruire? Di che tipo sarà la loro esistenza? Non vi è alcuna legge, alcuna regola seguendo la quale ciascuno di essi può venire costruito. Che significato dobbiamo allora dare *all'esistenza* dei numeri trascendenti?

J. Richard dimostra (1903), con argomenti sottili e rigorosi, che i numeri reali da noi effettivamente costruibili, cioè definiti con un numero finito di parole, con leggi ben determinate, non superano l'infinità numerabile. Ed E. Borel così chiarisce il senso del teorema di Cantor: «esistono nel continuo geometrico (se non è un abuso usare qui il verbo "esistere") dei numeri reali che non possono essere definiti con un numero finito di parole». La loro esistenza non potrà avere lo stesso senso dei numeri reali individuabili con una legge ben determinata.

Le considerazioni e le argomentazioni precedenti evidenziano varie criticità all'interno dei numeri reali e del continuo, che sono sottaciute.

Prima di concludere questo mio intervento **una digressione interessante e chiarificatrice**.

Dal punto di vista didattico è opportuna l'esposizione da W. Maraschini e M. Palma nel primo volume di *Conoscenze Matematiche*, per chiarire, l'idea che abbiamo di continuità della retta. Per eseguire una partizione è come se pensassimo di "tagliare" una retta **r**, facendone una sezione, in due parti A e B.



Secondo la nostra idea di continuità, non è possibile che A abbia un massimo, H, e, contemporaneamente, B abbia un minimo K. Se così fosse, infatti, "riattacando" le due parti, il punto K sarebbe il successivo di H: si avrebbe perciò una situazione di discretezza, contraria alla nostra idea di continuità.

D’altra parte, non è possibile che, operato il “taglio”, A non abbia il massimo e, allo stesso tempo, B non abbia il minimo.

Se così fosse, infatti, “saldando” di nuovo insieme le due parti di retta rimarrebbe un “buco”, cioè non esisterebbe sulla retta un elemento, e uno solo, che contemporaneamente è maggiore di tutti quelli di A e minore di tutti quelli di B. Infatti, non avendo A massimo, $sup(A) \in B$; e non avendo B minimo, $inf(B) \in A$: quindi $sup(A) \neq inf(B)$. Non esisterebbe perciò un ben definito punto che separa le classi A e B (o, ciò che è lo stesso, permette di “saldarle”.
La continuità deriva quindi dall’**ammissione** di questo elemento di separazione delle due classi: $sup(A)=inf(B)$.
Ricordiamo però che gli assiomi sono proposizioni vere non necessariamente perché dedotte logicamente, ma per scelta, purché comportino contraddizioni. Perciò è istruttivo esaminare cosa avviene se ammettiamo che elementi separatori di ogni sezione del campo razionale ne possono esistere almeno due distinti, quindi infiniti.
Siano α e β due elementi separatori distinti della sezione determinata da A e B tali che $\forall\ a \in A < \forall\ b \in B$.
Poiché a questi nuovi “oggetti matematici” vogliamo attribuire la dignità di numeri, essi devono presentare le stesse proprietà dei numeri a noi noti.
Se $\alpha<\beta$, $\beta-\alpha>0$; allora:

$$\forall\ a < \alpha < \beta < \forall\ b;$$

mentre, se $\alpha>\beta$, $\alpha-\beta>0$,

$$\forall\ a < \beta < \alpha < \forall\ b.$$

Allora, posto $q=b-a$ e $\delta=\beta-\alpha$, q è un qualunque numero razionale positivo e abbiamo che:

$$\textbf{(1)}\quad \mathbf{0 < \boldsymbol{\delta} < \boldsymbol{q} \quad \forall\ \boldsymbol{q} \in Q^+}.$$

Se $\alpha>\beta$, $\alpha-\beta>0$, e la **(1),** per la posizione fatta**,** diventa:

$$\textbf{(2)}\quad -q<-\boldsymbol{\delta}<\mathbf{0}\ \forall\ \boldsymbol{q} \in \mathbf{Q^+}. \quad \text{Da (1) e (2) otteniamo che:}$$

$$(*)\ \forall\ \boldsymbol{q} \in \mathbf{Q^+},\ |\boldsymbol{\delta}| < \boldsymbol{q}.$$

Allora, *se ammettiamo che una sezione dei numeri razionali possa avere almeno due elementi separatori distinti*, si originano dei nuovi numeri come **δ**, il cui valore assoluto è positivo, eppure è minore di ogni numero razionale positivo.
Osserviamo poi che:

$$\forall\ r \in R^+\ \exists\ q \in Q^+ \setminus q<r;\ \text{allora, } \forall\ r \in R^+ |\boldsymbol{\delta}| < \boldsymbol{r}.$$

Quindi:
per qualunque sezione di R, della quale **r** sia l’elemento separatore, esistono numeri come **δ** il cui valore assoluto è positivo, eppure è minore di qualsiasi numero reale positivo.
Ogni numero come **δ** lo chiameremo numero infinitesimo o, semplicemente **infinitesimo**, tenendo ben presente che questo termine denota *un numero* **non** *un limite*.
Il nuovo insieme che si viene a formare è definito insieme dei numeri **iperreali** e viene indicato con R^*. E, poiché in esso non vale l’assioma di Dedekind, non è valido l’assioma di Eudosso-Archimede che da quello si dimostra. Ma ciò non può essere un’argomentazione contro l’uso dei numeri infinitesimi e infiniti.

Conclusione
Penso di avere motivato a sufficienza le criticità che sorgono da un’attenta analisi dell’introduzione dei numeri reali e del continuo. E, per quel che vale il mio punto di vista, sono convinto che i numeri iperreali e l’ANS possono essere presentati nelle Scuole medie superiori con profitto. E ciò anche in virtù delle esperienze didattiche svolte, da oltre dieci anni, in diverse Università tra cui quelle di Verona, Venezia, Bologna, Pavia, Pisa, Padova, e nelle sezioni della Mathesis, delle stesse città.
Mi auguro che questo lavoro possa stimolare un proficuo dibattito di carattere logico, e non ideologico, sulla opportunità di trattare l’analisi infinitesimale in modo coerente con le geniali intuizioni di Leibniz e Newton.

Bibliografia
Euclide, *Στοικεῖα.* (Elementi).

G. Cantor, *Über die eines Satzes aus der Teorie der trigonometrischen Reihen* (Su un teorema della teoria delle serie trigonometriche).
R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Continuità e numeri irrazionali).
J. Stillwell, *The Real Number*. (I numeri reali).
G. Veronese, *Fondamenti*.
T. Levi-Civita, *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici.*
D. Hilbert, *Grundlagen der geometrie* (Fondamenti della geometria)
L. Brower, *Over de grondslagen der Wiskunde* (I fondamenti della scienza).

P.S.
Chi fosse interessato ad approfondire l'Analisi Non Standard può richiedermi il testo completo del Corso su iperreali e Analisi Non Standard, organizzato sulla Piattaforma SOFIA dalle AIF di Giarre e Catania, che ho tenuto nella primavera scorsa.

Giarre 07/09/2023

Alfio Grasso
E-mail: grassoalfino@yahoo.it