Soluzioni dei quesiti della maturità scientifica A.S. 2012/2013

Nicola Gigli *   Sun-Ra Mosconi †

June 20, 2013

Quesito 1

Detto T il triangolo e θ l'angolo compreso fra i lati di lunghezza nota, le proprietà del seno garantiscono l'eguaglianza

$$\frac{2 \cdot 3 \sin\theta}{2} = \text{Area}(T) = 3.$$

Quindi $\sin\theta = 1$, il che forza $\theta = 90°$ ed il triangolo è necessariamente rettangolo. La lunghezza c del terzo lato (che é quindi l'ipotenusa) si ottiene dal teorema di Pitagora come

$$c = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Quesito 2

Occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{3-x} \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2 - \sqrt{3-x}} \geq 0 \end{cases}$$

Possiamo elevare al quadrato ogni disequazione in quanto i membri sono non negativi per costruzione, ottenendo

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ 3 - x \leq 4 \\ 2 - \sqrt{3-x} \leq 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ 1 \leq 3 - x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

*Università di Nizza

†Università di Catania

che ha soluzione $x \in [-1, 2]$.

Quesito 3

La distanza di una retta r da A è la minima distanza dei punti della retta da A. Dovendo la retta passare per B, la distanza deve necessariamente essere minore o uguale a quella fra A e B. La diseguaglianza triangolare garantisce quindi che la retta cercata sia quella ortogonale al segmento $\overline{AB}$ e passante per B. La retta passante per A e B ha coefficiente angolare

$$m = \frac{-8 - (-1)}{-6 - 2} = \frac{7}{8}.$$

La retta ortogonale ha quindi coefficiente angolare $-8/7$ e si può scrivere come $r : y = -\frac{8}{7}x + q$. La sua quota si determina imponendo il passaggio per B:

$$-6 = -\frac{8}{7}(-8) + q \quad \Leftrightarrow \quad q = -\frac{102}{7}.$$

La retta cercata è quindi $y = -\frac{8}{7}x - \frac{102}{7}$.

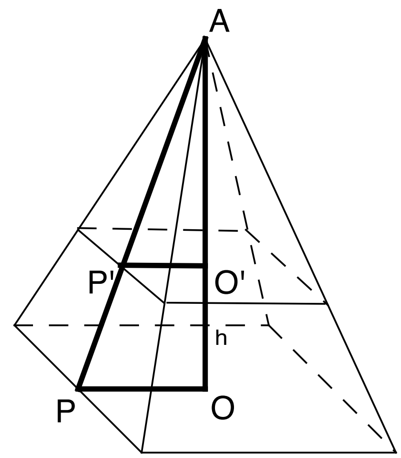
Quesito 4

Chiamiamo V il volume del tronco di piramide e supponiamo, senza perdere in generalità, che $a > b$ (ossia la base inferiore abbia lato a e quella superiore b). Sia A il vertice della piramide ottenuto prolungandone gli spigoli non orizzontali ed H la corrispondente altezza. Per il principio di Cavalieri, possiamo supporre che l'altezza della piramide ottenuta passi per il centro O della base inferiore e per quello O' della base superiore.

Ricordando che il volume di una piramide è dato dalla terza parte del prodotto fra l'area di base e l'altezza, possiamo esprimere il volume V del tronco di piramide come differenza, ossia

$$V = \frac{1}{3}Ha^2 - \frac{1}{3}(H - h)b^2.$$

La relazione che lega H ad a e b si ottiene considerando un lato della della base inferiore e chiamando P il suo punto medio. Il segmento $\overline{AP}$ interseca la base superiore nel punto P', che risulta essere (per il teorema di Talete sul piano contenente la faccia della piramide su cui giace $\overline{AP}$) il punto medio del lato del quadrato di lato b.



I triangoli $AP'O'$ e APO sono simili perché sono rettangoli in O' ed O rispettivamente ed hanno l'angolo in A in comune, quindi

$$\overline{O'P'} : \overline{O'A} = \overline{OP} : \overline{OA} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{2} : (H-h) = \frac{a}{2} : H \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{a}{a-b}h.$$

Inserendo nell'equazione precedente si ottiene quindi

$$V = \frac{h}{3}(\frac{a^3}{a-b} - \frac{b^3}{a-b}) = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2).$$

Quesito 5
L'affermazione del libro è corretta in buona approssimazione. Se la valigia ha lati a, b e c il suo volume è dato da $V = a \cdot b \cdot c$. Un aumento del $100p\%$ dei lati trasforma questi ultimi, rispettivamente, in $(1+p)a$, $(1+p)b$ e $(1+p)c$. Il volume diviene quindi

$$V_p = (1+p)^3 abc = (1+p)^3 V.$$

Una rapida verifica mostra la sostanziale correttezza dell'affermazione. Ad esempio per un aumento del 25%, si ha $p = 0,25$, e $(1+p)^3 \simeq 1,95$. Quindi la valigia raddoppia (quasi) il suo volume.

Quesito 6
Osserviamo preliminarmente che due numeri n e m (in scrittura decimale) soddisfano $n < m$ se e solo se leggendo le cifre dei numeri da sinistra a destra, la prima cifra di m che è diversa dalla corrispondente cifra di n, è maggiore. In particolare date k cifre distinte, il numero più piccolo che si può ottenere permutandone le

cifre è quello che le dispone in senso crescente da sinistra a destra. Inoltre, tutti i numeri che cominciano (a sinistra) per 1 sono minori di tutti quelli che cominciano per una cifra maggiore di 1.

I numeri che cominciano per 1 sono costruiti mediante una permutazione di $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ anticipata (a sinistra) da 1. Essi sono quindi i primi $6! = 720$ dei numeri considerati. Il numero di posto 721 deve quindi avere come prima cifra 2. Le altre cifre forniscono il numero più piccolo fra quelli ottenuti permutando $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, e si ottiene quindi il numero 2134567 al 721-esimo posto.

Per trovare quello al settimo posto, si considerino i numeri della forma $1234abc$, dove abc è una delle $3! = 6$ permutazioni di $\{5, 6, 7\}$. Questi sono i primi 6 numeri dell'iniseme considerato e il successivo ha quindi 5 come cifra al quarto posto da sinistra. Il settimo numero è quindi il più piccolo fra quelli della forma $1235abc$ con abc permutazione di $\{4, 6, 7\}$. Il settimo è quindi 1235467.

Quesito 7

Possiamo supporre che $a \leq b > 0$. Due rettangoli sono simili se e solo se hanno i lati in proporzione. Il fatto che il rettangolo iniziale abbia area 1 equivale alla condizione $ab = 1$. Il rettangolo ottenuto tagliando a metà quello iniziale come descritto dal testo ha lati a e $b/2$ rispettivamente. Delle due possibili proporzioni

$$a : a = b : \frac{b}{2}, \qquad a : \frac{b}{2} = b : a,$$

la prima è chiaramente impossibile, mentre la seconda fornisce $a^2 = b^2/2$. Quindi occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} ab = 1 \\ a^2 = \frac{b^2}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{b^2}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad b = \sqrt[4]{2}, \quad a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Quesito 8

Il teorema fondamentale del Calcolo Integrale garantisce che $g'(x) = f(x)$. Osservando il grafico di f, se ne deduce che $g' \geq 0$ in $[0, 2]$, $g'(x) \leq 0$ in $[2, 4]$ e $g'(x) > 0$ per un certo intervallo $[4, 4 + \delta]$ con $\delta > 0$. Quindi g è decrescente in $[2, 4]$ e crescente in $[4, 4 + \delta]$. Ne segue che nel punto $x_0 = 4$ la g ha un minimo locale. Nulla può dirsi sulla natura globale di tale minimo.

Quesito 9

Si osservi preliminarmente che il limite proposto presenta una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Sfruttando i limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

e ben note proprietà dei limiti, si ha

$$\lim_{x\to 0} 4\frac{\sin x \cos x - \sin x}{x^2} = 4 \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{\cos x - 1}{x^2} x = 4 \cdot 1 \cdot -\frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Quesito 10

La risposta corretta è la **A**. La **B** è esclusa in quanto si avrebbe $f' \geq 0$ in $[-2, 2]$, e quindi f dovrebbe essere crescente in tale intervallo, il che non è. Similmente si esclude la **C**, che fornirebbe per lo stesso motivo una f crescente in $[-4, 4]$. La **D** è esclusa perchè si avrebbe $f' > 0$ in un intorno di $x_0 = 2$, dove f ha invece un minimo e quindi derivata nulla. La **A** è l'unica che non presenta queste ostruzioni.