Soluzioni dei problemi della maturità scientifica A.S. 2012/2013

Nicola Gigli [*] Sun-Ra Mosconi [†]

June 20, 2013

Problema 1

1. Il teorema fondamentale del calcolo integrale garantisce che
$$f'(x) = \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$
Quindi
$$f'(\pi) = \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad f'(2\pi) = \cos\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. La funzione f' è periodica, ed il suo periodo si ottiene determinando il più piccolo $T > 0$ tale che
$$f'(0) = f'(T) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} = \cos\frac{T}{2} + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{T}{2} = 1.$$
L'ultima equazione ha soluzione $T/2 = 2k\pi$ e quindi $T = 4k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, da cui si deduce che il periodo è 4π. Essendo $9 < 4\pi$ possiamo studiare f' ed f in $[0, 4\pi]$. Notiamo che f' è continua insieme a tutte le sue derivate. Il segno di f' si determina risolvendo la disequazione trigonometrica $\cos\frac{x}{2} \geq -\frac{1}{2}$. Risolviamo (in $[0, 4\pi]$) l'equazione associata:
$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} = \pi \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3}\pi, \;\; x = \frac{8}{3}\pi.$$

[*]Università di Nizza
[†]Università di Catania

Mediante confronto grafico fra le funzioni $y = \cos\frac{x}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$ si deduce che

$$f'(x) \leq 0 \ \text{ per } x \in [0, 4\pi] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [\frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi].$$

La derivata di f' si calcola facilmente come

$$f''(x) = -\sin\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Quest' ultima è maggiore o uguale zero (nell'intervallo $[0, 4\pi]$) quando

$$\sin\frac{x}{2} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} \in [\pi, 2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2\pi, 4\pi].$$

Quindi f' risulta decrescente in $[0, 2\pi]$ e crescente in $[2\pi, 4\pi]$. Per studiare la concavità di f' calcoliamo la derivata seconda

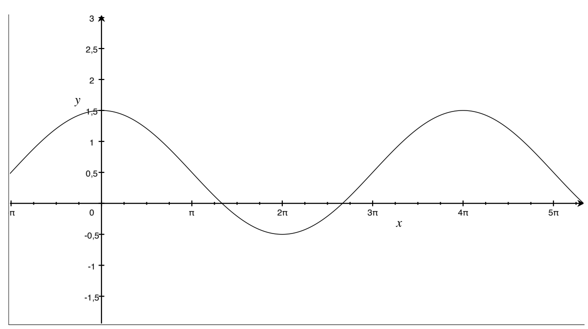
$$f'''(x) = -\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2},$$

e calcoli simili ai precedenti mostrano che in $[0, 4\pi]$ vale

$$f'''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad [\pi, 3\pi].$$

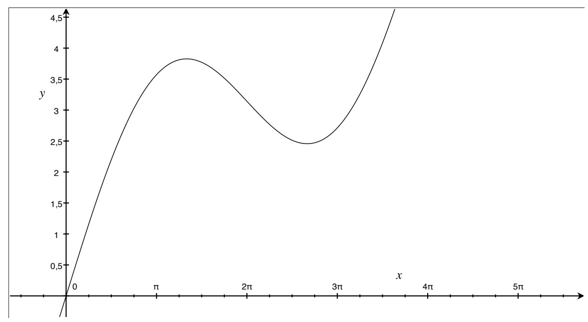
Quindi f' è concava in $[0, \pi] \cup [3\pi, 4\pi]$, convessa in $[\pi, 3\pi]$ ed ha due flessi in $x = \pi$ e $x = 3\pi$.

Il grafico qualitativo di f' è dunque il seguente.



Se ne deduce che f è crescente in $[0, \frac{4}{3}\pi] \cup [\frac{8}{3}\pi, 4\pi]$ (dove f' è non negativa) e decrescente in $[\frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi]$ (dove f' è non positiva). Dunque il punto $x = \frac{4}{3}\pi$ è di massimo locale, mentre il punto $x = \frac{8}{3}\pi$ è di minimo locale. Inoltre f è convessa in $[2\pi, 4\pi]$ e concava in $[0, 2\pi]$, con un flesso in $x = 2\pi$.

Il grafico qualitativo di f è il seguente.



3. Il valor medio di f' in $[0, 2\pi]$ è dato, mediante il teorema fondamentale del calcolo integrale, come

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,dx = \frac{f(2\pi) - f(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\,dt,$$

essendo chiaramente $f(0) = 0$. Poiché

$$\int \cos(\frac{t}{2}) + \frac{1}{2}\,dt = 2\sin(\frac{t}{2}) + \frac{t}{2} + c,$$

si ottiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,dx = 2\sin(\frac{t}{2}) + \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(\pi - 0) = \frac{1}{2}.$$

4. Per il principio di Cavalieri, il volume del solido W si determina integrando l'area delle sezioni. Si ha quindi

$$\mathrm{Vol}(W) = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 3\sin(\frac{\pi}{4}x)\,dx = -\frac{12}{\pi}\cos(\frac{\pi}{4}x)\Big|_0^4 = \frac{24}{\pi}.$$

Problema 2

1. Essendo la funzione f pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y e per studiarne l'andamento sarà sufficiente limitarci all'intervallo $[0, +\infty[$. Osserviamo che, per ogni $x \in [0, +\infty[$, risulta $f(x) > 0$. Inoltre, il punto di intersezione tra il grafico di f e l'asse y ha coordinate $(0, 2)$. La funzione è

continua insieme a tutte le sue derivate in $[0, +\infty[$ e non possiede asintoti verticali. Poiché si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{4+x^2} = 0,$$

la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per f.

Per studiare la crescenza e la decrescenza di f calcoliamo la sua derivata prima in $[0, +\infty[$:

$$f'(x) = 8\left(\frac{1}{4+x^2}\right)' = 8\frac{-2x}{(4+x^2)^2} = -\frac{16x}{(4+x^2)^2}.$$

È immediato osservare che $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0, +\infty[$. Di conseguenza, tenendo conto della parità della funzione f, essa risulta crescente nell'intervallo $]-\infty, 0]$, decrescente nell'intervallo $[0, +\infty[$ e possiede un punto di massimo assoluto in $x = 0$.

Per studiare la concavità e la convessità di f calcoliamo la sua derivata seconda in $[0, +\infty[$:

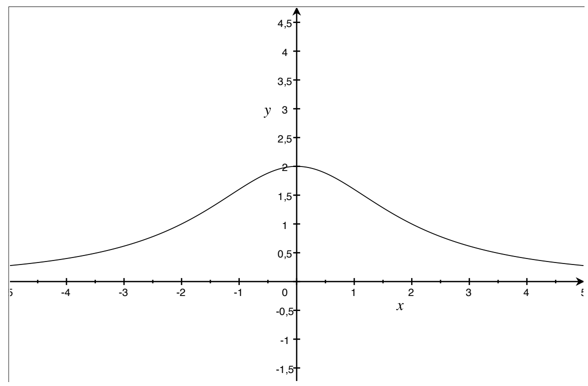
$$f''(x) = -16\left(\frac{x}{(4+x^2)^2}\right)' = -16\frac{(4+x^2)^2 - 4x^2(4+x^2)}{(4+x^2)^4} = 16\frac{3x^2-4}{(4+x^2)^3},$$

da cui ricaviamo

$$f''(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Di conseguenza, tenendo conto della parità della funzione f, essa rivolge la concavità verso l'alto nell'insieme $]-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}] \cup [\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty[$, rivolge la concavità verso il basso nell'insieme $[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$ e possiede due punti di flesso in corrispondenza ad $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ di coordinate $\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

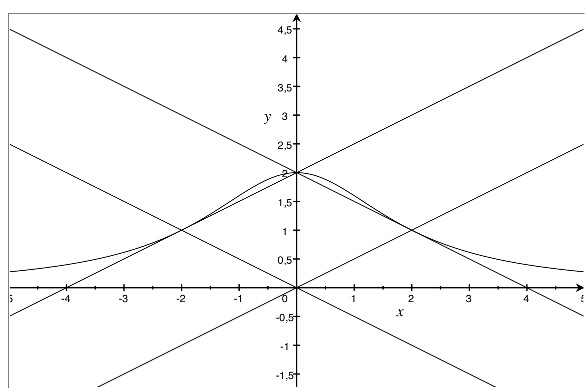
Il grafico qualitativo Φ della funzione f è il seguente:



Troviamo l'equazione della retta tangente a Φ nel punto $Q : (2, 1)$. Per far ció è sufficiente calcolare $f'(2) = -\frac{1}{2}$, ovvero il coefficiente angolare della retta cercata. Imponendo il passaggio per il punto Q ricaviamo:

$$y - 1 = -\frac{1}{2(x-2)} \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - 4 = 0.$$

Per ragioni di simmetria l'equazione della retta tangente a Φ nel punto $P : (-2, 1)$ ha equazione $x - 2y + 4 = 0$. La loro intersezione è il punto $R : (0, 2)$. Di conseguenza il quadrilatero convesso individuato da esse con le rette OP e OQ è il quadrilatero $OPRQ$ rappresentato in figura.

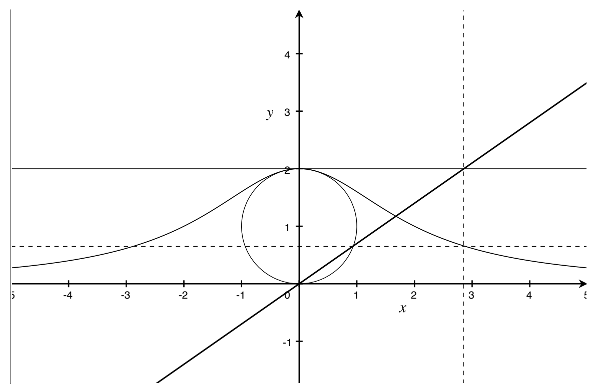


Notiamo che i punti P ed Q sono simmetrici rispetto all'asse delle y (che passa per O) di conseguenza i segmenti $\overline{OP}$ e $\overline{OQ}$ hanno la stessa lunghezza.

Inoltre i punti R ed O sono simmetrici rispetto alla retta $y = 1$ (che passa per i punti P e Q) e dunque i segmenti $\overline{OQ}$ e $\overline{OR}$ hanno la stessa lunghezza. Il quadrilatero $OPRQ$, avendo tutti i lati uguali, è dunque un rombo.

Per calcolare gli angoli richiesti osserviamo che l'angolo acuto individuato dalla retta OQ e dall'asse delle x ha tangente $\frac{1}{2}$. Poichè $\arctan \frac{1}{2} \simeq 26°34'$ dopo facili calcoli si trovano le misure richieste pari a: $126°52'$ e $53°8'$.

2. La costruzione descritta è rappresentata nella seguente figura:



La circonferenza Γ ha equazione $x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 0$. Osserviamo subito che se la retta t è l'asse delle x, il punto A coincide col il punto B e ha coordinate $(0, 2) \in \Gamma$. La retta generica passante per O ha equazione $y = mx$, dove $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Escludiamo il valore $m = 0$ perchè in questo caso la retta t non interseca la retta $y = 2$. Poiché il punto A appartiene alla retta t esso ha coordinate (x, mx); imponendo la condizione di appartenenza a Γ otteniamo:

$$x^2 + m^2x^2 - 2mx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \;\; x = \frac{2m}{1+m^2}.$$

Il secondo valore è quindi l'ascissa di A (essendo $A \neq O$) e di conseguenza la sua ordinata é

$$m \cdot \frac{2m}{1+m^2} = \frac{2m^2}{1+m^2}.$$

Si ricava facilmente che il punto B ha coordinate generiche $(\frac{2}{m}, 2)$. Il punto di cui vogliamo verificare l'appartenenza a Φ ha dunque coordinate $(\frac{2}{m}, \frac{2m^2}{1+m^2})$.

Esso appartiene a Φ se e solo se:

$$\frac{2m^2}{1+m^2} = \frac{8}{4+\frac{4}{m^2}},$$

che è facilmente verificata per ogni $m \neq 0$.

3. Il cerchio delimitato da Γ ha area π; ci basta dunque verificare che il valore del seguente integrale definito, che esprime l'area della regione R, è lo stesso:

$$8\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = 4\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = 4\left[\arctan\frac{x}{2}\right]_0^2 = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi.$$

Tenendo conto della parità della funzione f l'area della regione compresa tra Φ e tutto l'asse delle x è data dal valore del seguente integrale definito:

$$2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 2\lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(x)\,dx = 2\cdot\lim_{a\to+\infty} 4\cdot\arctan\frac{a}{2} = 4\pi.$$

4. Chiamiamo $A(y)$ l'area della sezione di W con il piano perpendicolare all'asse y passante per y. Il principio di Cavalieri asserisce che il volume di W si determina integrando tale funzione. Poichè il massimo e il minimo di f in $[0,2]$ sono rispettivamente $y=2$ e $y=1$, è chiaro che $A(y)=0$ per $y<1$ o $y>2$. L'area $A(y)$ è quella di un cerchio di raggio $r(y)$, dove $r(y)\geq 0$ risolve $y=f(r(y))$, ossia, con facili calcoli,

$$r(y) = \sqrt{\frac{8}{y}-4} \quad \Rightarrow \quad A(y) = \pi r(y)^2 = \pi\left(\frac{8}{y}-4\right).$$

L'integrale definito che fornisce il valore del volume di W è dunque il seguente:

$$\int_1^2 \pi\left(\frac{8}{y}-4\right)\,dy = \pi(8\log 2-4).$$