Gli scacchi a scuola: articolo metodologico didattico

Scorrendo gli articoli presenti nel sito ho notato che, per quel che riguarda la matematica, mancano in sostanza contributi dei docenti che si riferiscono all'aspetto metodologico-didattico.
Ma, come insegna la storia:

- L'*Homo sapiens* ha soppiantato l'*Homo di Neanderthal*, che pure era più vigoroso, perché aveva sviluppato un linguaggio più completo che permetteva di scambiare in modo più efficace le informazioni tra gli individui e quindi accresceva la conoscenza collettiva.
- Le prime civiltà sono fiorite lungo le fertili sponde dei grandi fiumi, Nilo, Tigri ed Eufrate, Indo, perché il territorio facilitava la circolazione delle idee fra le diverse popolazioni.

Auspico per ciò che si apra sul sito un dibattito sull'aspetto considerato per rendere più efficace il nostro insegnamento.
Quello che segue vuole essere un piccolo contributo all'eventuale dibattito.
Tempo fa, su un quotidiano nazionale, c'era un articolo in cui con diverse motivazioni si suggeriva l'introduzione a scuola del gioco degli scacchi, sin dalle elementari. Si sosteneva che aiuta gli allievi a trovare strategie risolutive nelle situazioni che il gioco prospetta. Mi sta bene.
Quello che **non** sta bene è che la nostra scuola **non** è strutturata per abituare i giovani a scoprire strategie risolutive.
Solo recentemente, nella Prova scritta di Matematica degli Esami di Stato dei Licei Scientifici, si è avviata l'introduzione dell'aspetto problematico nei temi presentati. Ma il *problem solving*, cioè la didattica per problemi, deve essere un'attività sistematica, da iniziare subito. Invece, purtroppo, di solito si prendono le mosse da definizioni astratte e perciò poco "problematiche" per i giovani.
È consuetudine premettere alle equazioni moltissimo, troppo calcolo. E non si tiene conto del fatto che, laddove lo studio della fisica comincia al primo anno, le equazioni sono utilizzate, senza avere chiarito in modo appropriato l'importanza dell'applicazione dei due principi d'equivalenza. Inoltre, l'uso dei grafici viene introdotto dagli insegnanti di fisica, che ne hanno necessità, senza avere fatto maturare i concetti che ne sono alla base.
Si è colpevolmente trascurata, quasi eliminata, la geometria, ricca di situazioni problematiche (nei libri di testo delle scuole medie superiori la geometria è normalmente messa alla fine, come se fosse figlia di un dio minore). Molte di esse possono essere presentate a partire da problemi concreti per risolvere i quali l'allievo può essere coinvolto efficacemente nel prospettare strategie risolutive. Inoltre, senza un consistente substrato geometrico gli efficaci mezzi della geometria analitica diventano una serie di formule prive di contenuto.
E ancora, con qualche rara eccezione, non si attua in concreto l'interdisciplinarità tanto sbandierata.
Quanto segnalato suggerisce, a mio modesto avviso, di modificare, anche in modo sostanziale, la nostra impostazione didattica e quella dei libri di testo.
Sarebbe opportuno, qualunque sia l'argomento da introdurre:

- inserirlo nel contesto storico-culturale che gli è proprio (fonte di suggestioni per i giovani);
- prendere le mosse da un problema;
- prospettare diversi ambiti di utilizzo, sia applicativi sia teorici.

Per la geometria in particolare l'assiomatica abituale, quella di **Euclide-Hilbert**, è molto pesante –**ventuno proposizioni** – che sarebbe opportuno non infliggere sin dall'inizio. Non si tiene conto del fatto che né gli *Elementi* di Euclide né la loro revisione critica *I fondamenti della geometria* di Hilbert, che colmava le lacune degli *Elementi*, sono stati concepiti come libri di testo scolastico.
Come veniva segnalato già nel Congresso **internazionale** di Cagliari del **1982**:

- A quattordici anni non si ha la maturità sufficiente per comprendere bene il concetto di assioma (nei vari libri di testo spesso non si richiamano gli assiomi a giustificazione di certe conclusioni, ma si dice: o "è chiaro…" o "è evidente…").
- Si potrebbe utilizzare più efficacemente dal punto di vista didattico – all'avvio in maniera sottointesa - l'assiomatica a base metrica, proposta da **Choquet** nel **1956** al Congresso **internazionale** di Royamont, che consiste di soli **sette assiomi** *semplici*, *intuitivi* e *forti*. Essa si fonda sull'uso delle isometrie sia come strumento euristico sia dimostrativo. In particolare della simmetria bilaterale, che è largamente presente in natura dalle particelle elementari agli animali superiori e non e nell'arte di tutti i luoghi e di ogni tempo.

Mediante esse si può introdurre efficacemente sia l'equazione della retta al primo anno sia quella della parabola al secondo. (La mia proficua esperienza di questa impostazione risale al **1975**).
Questi gli assiomi.
ASSIOMA I (d'incidenza)
Per ogni coppia di punti distinti esiste una retta ed una sola cui appartengono. (Oppure, più solitamente) *Per due punti distinti passa una ed una sola retta*.
ASSIOMA II (di Euclide)

Per ogni retta **r***, e per ogni punto* **P** *esiste una ed una sola retta per* **P** *parallela a r*. (O anche)
*Per un punto si può condurre una e una sola retta parallela a una retta data***.**

<u>ASSIOMA III</u> (di ordine)

Ogni retta è dotata di due relazioni d'ordine totale, una opposta all'altra.

<u>ASSIOMA IV</u> (di partizione)

Data nel piano **π** *una retta* **r***, l'insieme complementare di* **r** *rispetto a* **π** *è suddiviso in due sottoinsiemi*, *detti semipiani aperti*, *dotati di infiniti punti e tali che*:

- *il segmento che congiunge due qualunque punti di un semipiano aperto non interseca* **r**;
- *il segmento che congiunge due qualsiasi punti di semipiani aperti opposti incontra* **r.**

<u>ASSIOMA V</u> (della distanza)

A ogni coppia di punti **(A,B)** *del piano è associato un numero reale* **r≥0,** *detto* **distanza** *tra* **A** *e* **B**, *che indichiamo con* $\overline{AB}$ *, con le seguenti proprietà*:

- $\overline{AB}$ =**0** <u>se e solo se **A≡B**</u>;
- <u>per ogni coppia di punti (A,B),</u> $\overline{AB}$ **=** $\overline{BA}$ (proprietà simmetrica della distanza);
- <u>assegnati una semiretta **s** di origine **O** ed un numero reale **r≥0**, su **s** esiste *uno ed un solo* punto **P** tale che</u> $\overline{OP}$ =**r** (continuità);
- <u>per ogni terna di punti {**A**, **X** e **B**} si ha:</u> $\overline{AB}$ ≤ $\overline{AX}$ + $\overline{XB}$ <u>(disuguaglianza triangolare)</u>,
  <u>dove l'uguaglianza vale *se e solo* se **X** appartiene al segmento **AB** che denoteremo con</u> [**AB**].

<u>ASSIOMA VI</u> (di simmetria)

Per ogni retta **s** di **π** *esiste una ed una sola simmetria di asse* **s.**

<u>ASSIOMA VII</u> (della misura degli angoli)

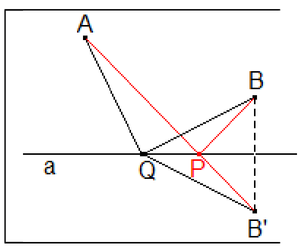
A ogni numero reale **r≥0** *è associato un angolo, di cui* **r** *è detto la misura o ampiezza, tale che alla somma di due angoli consecutivi è associato il numero somma delle ampiezze dei due angoli.*

Se **0≤r<2π**, (**0°≤r°<360°)** il numero è detto **misura principale**; ogni altra misura è un suo multiplo intero relativo di **2π (360°)**. Un angolo ha quindi **infinite misure**.
Se **p** (**p°**) è la misura principale di un angolo, ogni altra sua misura **x** è:

<u>**x=p+2kπ**</u>, con **k** ¿ **Z**, o <u>**x°=p°+k360°**</u>, con **k** ¿ **Z** (vedi risoluzioni delle equazioni goniometriche).
Gli assiomi proposti consentono di ottenere da subito importanti proprietà e d'introdurre sin del primo anno la geometria analitica in modo semplice, coerente e organico.
A chiarimento di quanto illustrato propongo due esempi per il biennio e due per il triennio.

I)

Problema: <u>Dati una retta e due punti generici appartenenti a uno stesso semipiano rispetto a essa, trovare il percorso più breve che li congiunge dovendo toccare la retta</u> (problema di **Erone).**
In una zona pianeggiante c'è un lungo tratto rettilineo di autostrada **a.** Si deve costruire un casello che serva due cittadine **A** e **B**, dalla stessa parte rispetto **a.** In quale punto **P** di **a** si deve costruire il casello affinché la somma dei tragitti $\overline{AP}$ + $\overline{PB}$ sia la più breve, quindi la più economica? Rendiamo in grafico la situazione e ricordiamo che la simmetria assiale è un'isometria, quindi lascia invariate
lunghezze di segmenti e ampiezze di angoli e consente di trasformare una spezzata in un segmento rettilineo della stessa lunghezza più semplice da confrontare con altri segmenti.
Qualche suggerimento?.... *OK,* vediamo se la simmetria ci può aiutare.



Sia **B'** (**A'**) l'associato di **B** (**A**) nella simmetria $\mathbf{s_a}$ di asse **a** (figura), tracciamo il segmento **AB'**; esso interseca **a** nel punto **P** perché…*Si*, **A** e **B'** stanno nei semipiani opposti individuati da **a.** Poiché **P** appartiene ad **a** è unito, quindi $\overline{PB}'=\overline{PB}$ e da ciò: $\overline{VP}+\overline{PB}=\overline{VP}+\overline{PB}'=\overline{VB}'$, dunque (*) $\overline{AP}+\overline{PB}=\overline{VB}'$.

È facile ora provare che $\overline{AP}+\overline{PB}$ è il percorso cercato. Confrontiamo $\overline{AP}+\overline{PB}$ con $\overline{AQ}+\overline{QB}$, dove **Q** è un qualunque punto di **a** diverso da **P**; il tragitto $\overline{AQ}+\overline{QB}=\overline{AQ}+\overline{QB}'$, perché il segmento **QC'** è simmetrico del segmento **QC**. *Allora*…, giusto, per la proprietà triangolare: (**) $\overline{AB}' < \overline{AQ}+\overline{QB}'$. Da (*) e (**) segue infine che:

$$\overline{AP}+\overline{PB}<\overline{AQ}+\overline{QB}'$$

.

È interessante legare riflessione della luce e simmetria assiale.

2) Risoluzione delle equazioni algebriche di secondo grado.

Facciamo un salto indietro di più di un millennio e occupiamoci di quello che è considerato il padre dell'algebra, il grande matematico e astronomo arabo **al-Khwarizmi** attivo nel IX secolo d.C. nella Casa della Sapienza a **Bagdad**, diventata la nuova Alessandria d'Egitto, faro della cultura.

Nel suo lavoro più importante, *Kitab Al-Jabr* (vi ricorda qualcosa?), si trova questo problema:

Il quadrato più dieci volte il suo lato dànno come somma trentanove unità; trovare il lato.

Traduciamo in calcolo. Indicata con **x** la misura del lato incognito otteniamo l'equazione $x^2+10x=39$, che possiamo scrivere (1) $x^2+10x-39=0$: l'equazione che risolve il problema è di secondo grado dato che presenta l'incognita con esponente 2. Ma noi fino a ora sappiamo risolvere equazioni di primo grado. Attrezziamoci, dopo avere introdotto un poco di terminologia.

Un'equazione di secondo grado nell'incognita **x**, svolti i calcoli e applicato il primo principio d'equivalenza, ha la stessa struttura della (1): (*) $ax^2+bx+c=0$, dove **a**, **b** e **c** sono numeri reali, con $a\neq0$. Essa viene detta forma **normale**, **canonica** o **ridotta** dell'equazione. Se nella (*) $b\neq0$ e $c\neq0$, l'equazione si dice **completa**. Alla sua risoluzione giungeremo per gradi, muovendoci dal semplice al complesso come suggeriva **Cartesio** nelle sue *Regulae* per risolvere i problemi.

Un caso particolare: se nella (*) $b=0$ e $c=0$, essa diventa $ax^2=0$, che, essendo $a\neq0$ dà $x^2=0$, cioè $x=0$.

Un'equazione del tipo $ax^2=0$, si suole chiamare, per ovvi motivi, monomia.

Riprendiamo il nostro percorso. Consideriamo un altro problema che si trova nel *Kitab Al-Jabr*:

Dividere 10 in due parti tali che il quadrato della prima sia uguale a quattro volte il prodotto delle due parti.

Al-Khwarizmi espone passo per passo il procedimento risolutivo. Cerchiamo di trovarlo anche noi.

Traduciamo il problema in algebra tenendo conto che l'incognita è il primo fattore……

Si, se indichiamo con **x** la prima parte, la seconda è **10-x**; otteniamo così l'equazione $x^2=4x(10-x)$.

Svolgiamo i calcoli: $x^2=40x-4x^2$; applicando il primo principio d'equivalenza abbiamo $x^2-40x+4x^2=0$, cioè (2) $5x^2-40x=0$. Quella ottenuta è un'equazione di secondo grado poiché presenta l'incognita con esponente **2**.

Cercate di risolvere l'equazione utilizzando le conoscenze che avete….

Va bene. Raccogliendo a fattore comune **5x** il primo membro diventa $5x(x-8)=0$ che, per la proprietà di annullamento del prodotto, dà $x=0$ o $x-8=0$, cioè $x=8$; come il matematico arabo scartiamo la soluzione nulla, per cui l'unica soluzione è $x=8$.

Generalizziamo il procedimento usato per risolvere un'equazione che ha la stessa struttura della (2), cioè nel caso in cui i coefficienti di x^2 e **x** sono rispettivamente **a** e **b**, due numeri reali generici, cioè diversi da zero: **(2)** $ax^2+bx=0$. Qualche suggerimento?.....

Va bene, possiamo di nuovo utilizzare il procedimento precedente:

da $ax^2+bx=0$ segue $x(ax+b)=0$, quindi $x=0$ o $ax+b=0$, cioè $ax=-b$ e infine $x=-b/a$.

L'equazione $ax^2+bx=0$ si ottiene da quella normale se $c=0$, si suole chiamare **spuria**.

Da quanto ottenuto: un'equazione spuria ammette, qualunque siano **a** e **b**, la soluzione $x=0$.

Andiamo ancora più indietro e riportiamoci a circa **4000** anni fa.

I babilonesi furono grandi astronomi, costruttori di canalizzazioni e di fortezze e avevano escogitato un sistema di numerazione sessagesimale agile nei calcoli. Affrontarono e risolsero problemi concreti relativi alle loro diverse attività: fare calcoli astronomici, determinare le aree dei campi e il volume dei granai, computare interessi e tasse, dividere le quote dei raccolti, costruire canali.

Le informazioni che abbiamo si fondano su migliaia di tavolette di terracotta, scritte in caratteri cuneiformi, risalenti circa al 1800-2000 a.C., in cui si trovano le risoluzioni di problemi.

Una di esse contiene il seguente problema che riguarda le aree di terreni:

Dividere l'area di un quadrato di lato 10 in due quadrati più piccoli tali che il lato dell'uno sia ¾ dell'altro.

Lo scriba indica passo per passo la procedura risolutiva da cui si deduce che i babilonesi sapevano risolvere certe equazioni di secondo grado; non vi è traccia però, in questo come in altri problemi, di un procedimento generale di risoluzione.

Matematizziamo il problema traducendolo in termini algebrici moderni. Per determinare le aree dei quadrati dobbiamo cercarne i lati, di cui uno sia **3/4** dell'altro, quindi…...
Si, conviene indicare come incognita, sia **x,** la misura del lato del quadrato più grande; quello del quadrato più piccolo è allora $\frac{3}{4}x$. Esprimiamo mediante l'incognita la richiesta del problema.
Otteniamo $\mathbf{x^2+}$ $(\frac{3}{4}x)^2$ **=100**, cioè $\mathbf{x^2+}$ $\frac{9}{16}x^2$ **=100**, ossia $\mathbf{16x^2+9x^2=16\cdot 100}$, ovvero (*) $\mathbf{25x^2=1600}$.
Come proseguireste?....
Giusto! Come se si trattasse di un'equazione di primo grado; dividendo ambo i membri per il coefficiente dell'incognita, cioè per 25, otteniamo $\mathbf{x^2=1600/25}$, da cui $\mathbf{x^2=64}$. Si devono trovare le radici quadrate di **64** che sono **-8** e **8**; tenendo però conto del fatto che **x** è la misura di un segmento, il valore di **x** che risolve il problema è solo: **x=8.**
L'equazione (*) cui conduce il problema si può scrivere $\mathbf{25x^2-1600=0}$. ottiene da quella normale se **b=0**: $\mathbf{ax^2+c=0}$; essa viene detta equazione **pura**.
Essa si può scrivere come $\mathbf{ax^2=-c}$, cioè $\mathbf{x^2=-c/a}$ (ricordiamo che **a≠0**) e:

- se **a** e **c** hanno segno opposto **–c/a>0**, quindi ha due soluzioni opposte **x=±** $\sqrt{-c/a}$, come abbiamo visto nell'esempio precedente.
- se **a** e **c** hanno segno uguale **–c/a<0**, abbiamo $\mathbf{x^2=-c/a}$, dunque l'equazione non ha radici reali perché un quadrato, qualunque ne sia la base, è un numero *non negativo*.

Per affrontare la risoluzione dell'equazione completa di secondo grado riprendiamo il problema del *Kitab Al-Jabr* considerato all'inizio.
Il quadrato e dieci volte il suo lato dànno come somma trentanove unità; trovare il lato.
Come abbiamo visto il problema porta a (1) $\mathbf{x^2+10x-39=0}$.
È interessante seguire la risoluzione di **Al-Khwarizmi** sia perché significativa dal punto di vista didattico, sia perché ci consentirà di ottenere il procedimento risolutivo generale.
L'aspetto didattico risiede nel fatto che **Al-Khwarizmi** prospetta un'interessante strategia nella risoluzione dell'equazione, che Cartesio indicherà nel Seicento per risolvere i problemi:
<u>Se non sai risolvere un problema cerca di collegarlo con uno più semplice che hai già risolto</u>.
Egli riconduce questo caso a quello di un'equazione di secondo grado del tipo $\mathbf{z^2=h}$, che, per quanto visto ha due soluzioni reali opposte se **h>0**, mentre non ha soluzioni reali se **h<0**. Utilizza il procedimento di completamento del quadrato di binomio che avete imparato l'anno scorso.
La (1), per il primo principio di equivalenza, diventa $\mathbf{x^2+10x=39}$. Possiamo ora scrivere il primo membro $\mathbf{x^2+2\cdot 5\cdot x}$; abbiamo il quadrato $\mathbf{x^2}$, il secondo addendo contiene il fattore 2 del doppio prodotto e il fattore **x** base del primo quadrato, **5** è allora la base del secondo quadrato; per avere il quadrato di binomio dobbiamo allora aggiungere il quadrato di **5**, **25**. Così però avremo alterato il primo membro $\mathbf{x^2+2\cdot 5\cdot x}$; allora addizioniamo e sottraiamo ad ambo i membri **25**, abbiamo: $\mathbf{x^2+2\cdot 5\cdot x+25=39+25}$, che possiamo scrivere $\mathbf{(x+5)^2=39+25}$, cioè $\mathbf{(x+5)^2=64}$. Così l'equazione è sotto la forma $\mathbf{z^2=h}$, con **h>0**, che sappiamo risolvere: **x+5=** $\pm\sqrt{64}$; da questa otteniamo **x+5=-8,** cioè **x=-13**, o **x+5=8**, da cui **x=3**. Poiché **x** è la misura di un segmento, l'unica soluzione è **x=3.**
Un ulteriore esempio di risoluzione di un'equazione completa.
<u>Il problema contenuto nella *Tavoletta BM 13901:1**, trovato vicino a Babilonia e che risale al 1800 a.C. circa, chiede di determinare un numero tale che, sommando al suo quadrato, si ottenga 3/4</u> .
Trasferiamolo nel linguaggio dell'algebra…….
Si, indicato con **x** il numero cercato, il problema si traduce nell'equazione $\mathbf{x+x^2=3/4}$; ordinandola diviene $\mathbf{x^2+x=3/4}$: questa è un'equazione completa di secondo grado.
Usiamo il completamento del quadrato: $\mathbf{x^2+2\cdot x\cdot}\frac{1}{2}$ **=** $\frac{3}{4}$, quindi, addizionando e sottraendo ad ambo i membri $\frac{1}{4}$ - quadrato del secondo termine del binomio - otteniamo: $\mathbf{x^2+2\cdot x\cdot}\frac{1}{2}$ **+** $\frac{1}{4}$ **=** $\frac{3}{4}$ **+** $\frac{1}{4}$, da

cui $(x+\frac{1}{2})^2=1$. Da questa ricaviamo $x+\frac{1}{2}=\pm 1$, dalla quale segue $x+\frac{1}{2}=1$, cioè $x=\frac{1}{2}$, oppure $x+\frac{1}{2}=-1$, ossia $x=-\frac{3}{2}$. L'unica soluzione è $x=\frac{1}{2}$ perché **x** è la misura di un segmento.
A questo punto, utilizzando l'esempio precedente, possiamo ottenere la formula risolutiva generale dell'equazione algebrica di secondo grado ridotta a forma normale $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$.
Per avere il quadrato di **x**, x^2,….*Si*, dividiamo ambo i membri per **a**; otteniamo $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, o anche $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$, come nell'esempio di prima. Proseguiamo.
Come sopra introduciamo il fattore **2** del doppio prodotto nel coefficiente di **x** e, per non alterarlo dividiamo $\frac{b}{a}$ per **2**, abbiamo $x^2+2\frac{b}{2a}x=-\frac{c}{a}$. Poiché **x** è la base del primo quadrato quella del secondo è $\frac{b}{2a}$; dobbiamo allora addizionare e sottrarre ad ambo i membri $(\frac{b}{2a})^2$, cioè $\frac{b^2}{4a^2}$. Otteniamo così $x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$ o anche $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$. Questa, fatti i calcoli a secondo membro, diventa: (*) $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.
Come nel caso delle equazioni pure possono presentarsi due casi:

- se $b^2-4ac\geq 0$ l'equazione ha due soluzioni reali;
- se $b^2-4ac<0$ l'equazione **non** ha soluzioni reali.

Precisiamo il primo caso $b^2-4ac\geq 0$:

1. Se nella (*) $b^2-4ac=0$, abbiamo $(x+\frac{b}{2a})^2=0$, quindi $x+\frac{b}{2a}=0$ e infine $x=-\frac{b}{2a}$.
   L'equazione ha una sola soluzione reale o come si dice anche due soluzioni reali e coincidenti.
2. Se nella (*) $b^2-4ac>0$, otteniamo $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, cioè $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ da cui

$$(**)\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Dalla formula precedente troviamo le due soluzioni reali e distinte, che indichiamo con x_1 e x_2:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Poiché il risultato è stato ottenuto utilizzando coefficienti qualunque, per risolvere un'equazione completa è sufficiente applicare la (**).
N.B.
I tre tipi di equazioni spuria, pura e completa vanno introdotte uno alla volta nel progetto didattico.

3)
In uno dei libri di testo che va per la maggiore, per quel che si riferisce all'introduzione dei **numeri complessi**, si legge:
<u>Si dice numero complesso una coppia ordinata di numeri reali</u>.
Tutti gli studenti stapperanno certamente bottiglie di champagne!
Un possibile percorso potrebbe essere il seguente, in cui si tiene conto del fatto che, come vedremo tra breve, nuovi "oggetti numerici", che verranno poi chiamati **numeri complessi**, si presentano da sé *irrompendo* nella matematica nella risoluzione delle equazioni algebriche terzo grado.
È bene prendere l'avvio illustrando l'importanza degli algebristi italiani del Cinquecento, **Del Ferro**, **Fontana** - noto come **Tartaglia - Cardano**, **Ferrari**, **Bombelli**, che a vario titolo, hanno avuto il merito di contribuire alla risoluzione per mezzo dei radicali e alla diffusione e applicazione delle equazioni algebriche generali dei terzo e quarto grado, primo grande passo dalla geometria della Grecia antica e da **Al Kwarizmi**, padre dell'algebra, della prima metà del **IX** secolo.
Cardano, nell'*Ars Magna* (La grande arte), vuole risolvere il seguente problema:
dato un segmento lungo 10 metri dividerlo in due parti tali che l'area del rettangolo da esse determinato sia 40 m^2.
Il problema conduce all'equazione $x^2-10x+40=0$, risolta la quale ottiene:

$$x=5\pm\sqrt{-15}.$$

Ma $\sqrt{-15}$ era un "oggetto numerico" che non ha senso all'interno delle conoscenze acquisite (che erano quelli che noi chiamiamo i numeri reali, anche se una loro esposizione rigorosa verrà fatta solo nella seconda metà dell'Ottocento a opera di **Cantor** e **Dedekind**, in modo indipendente).
Cardano nota però una stranezza; se considera $\sqrt{-15}$ come un *numero*:
la somma delle soluzioni è $x_1+x_2=5-\sqrt{-15}+5+\sqrt{-15}=10$ e il loro prodotto $x_1*x_2=(5-\sqrt{-15})*(5+\sqrt{-15})=5^2-(\sqrt{-15})^2=25-(-15)=40$, cioè questi *strani numeri* risolvono il problema.
Scatta così una molla che gli fa intravedere la possibilità di introdurre nuovi "oggetti numerici".
Il matematico che riconosce per primo la necessità di ampliare l'insieme dei numeri allora conosciuti fu Bombelli (1526-1573). Nella sua opera *L'Algebra*, raccoglie e completa i risultati ottenuti in campo algebrico precedentemente da diversi matematici; si propone così di completare i vari casi di risoluzione delle equazioni di terzo grado, anche nel cosiddetto caso *irriducibile*, cioè quando nella formula risolutiva si presenta la radice quadrata di un numero negativo.
Del Ferro e Tartaglia avevano determinato la formula risolutiva dell'equazione algebrica generale di terzo grado $ax^3+bx^2+cx+d=0$ riducendola con opportune trasformazioni a equazioni di tre tipi: $x^3+px=q$, $x^3=px+q$ e $x^3+q=px$, con **p** e **q** positivi.
Ecco uno degli esempi di Bombelli, l'equazione $x^3=15x+4$.
Nota che $x=4$ è soluzione dell'equazione, ma, applicando la formula di Tartaglia a essa relativa, ottiene:

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Questa, applicata al nostro caso, dà:

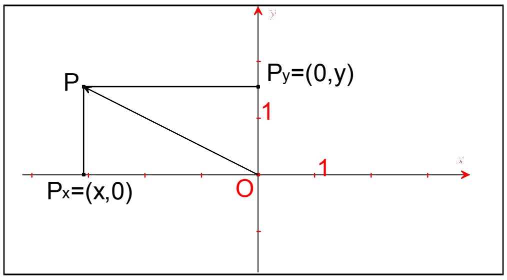
$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Bombelli pensa di estendere ai nuovi oggetti numerici le proprietà note dei radicali e scrive quindi la soluzione precedente come $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-1}*\sqrt{121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-1}*\sqrt{121}}$.
Se in essa poniamo $i=\sqrt{-1}$, come suggerirà in seguito **Eulero**, quindi $i^2=-1$, ricaviamo:

$$x=\sqrt[3]{2+i*\sqrt{121}}+\sqrt[3]{2-i*\sqrt{121}}=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}.$$

A questo punto Bombelli prova che, applicando le consuete proprietà delle operazioni ai nuovi oggetti numerici, ottiene **2+11i=(2+i)^3** e **2-11i=(2-i)^3**; quindi la soluzione si può scrivere:

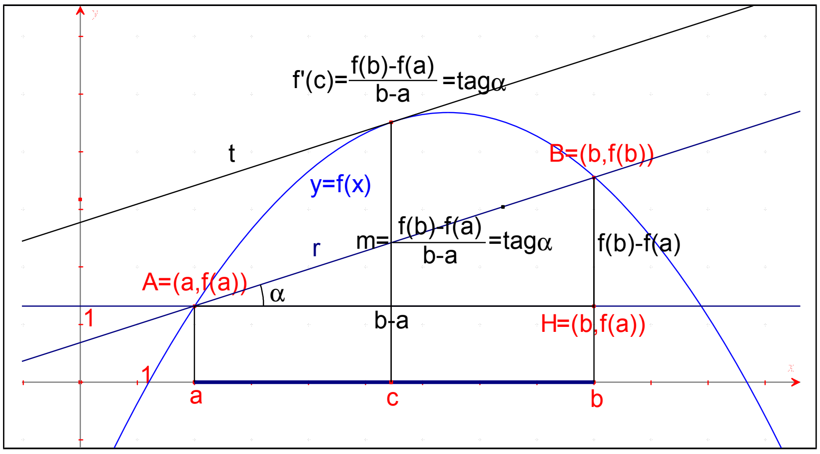
x= $\sqrt[3]{(2+i)^3}+\sqrt[3]{(2-i)^3}$, da cui **x**= 2+i +2-i =, cioè **x=4**, che è la soluzione prima trovata.
Questo risultato corrobora le sue idee.
Bombelli espone le formule della somma e del prodotto di quelli che considera, dai risultati ottenuti, nuovi numeri, che chiama "numeri silvestri". Egli, nell'introduzione di questi nuovi numeri, cerca di conservare le proprietà formali delle operazioni e delle relazioni già note tra numeri che sono alla base del calcolo.
Questi nuovi "oggetti numerici" verranno chiamati **numeri complessi** e si possono scrivere, come visto, sotto la forma **x+yi**, dove **i** $=\sqrt{-1}$ si chiama unità immaginaria, **x** si definisce parte reale e **y** parte immaginaria. Lo zero complesso, che indichiamo sempre con **0=0+0i**, è quello che ha uguale a zero sia la parte reale che la parte immaginaria.
Osserviamo innanzitutto che, come le frazioni sono individuate da coppie ordinate di numeri interi (**a,b**), con **b≠0**, che noi scriviamo solitamente come **a/b**, così questi nuovi "oggetti numerici" sono caratterizzati da una coppia ordinata (**x,y**) di numeri reali.
Ciò suggerisce un'interessante rappresentazione geometrica di questi nuovi "numeri".
Sappiamo che ogni numero reale si può rappresentare biunivocamente come un punto su una retta munita di un sistema di coordinate ascisse. La scrittura precedente vi suggerisce qualche interpretazione grafica di un numero complesso **x+yi**?....
Bene! **Gauss** (1777-1855), detto il principe dei matematici, propose proprio di associare a ogni numero complesso **x+yi** il punto di un piano cartesiano che avesse **x**, la parte reale, come ascissa e come ordinata **y** la parte immaginaria. Così è possibile fare corrispondere in modo biunivoco a ogni numero complesso un solo punto del piano.
Inoltre, poiché assegnato un qualunque punto **P** del piano a esso possiamo associare biunivocamente il vettore di origine **O** e di secondo estremo il punto **P=(x,y)**, viene a stabilirsi una corrispondenza biunivoca tra questi "numeri" e i vettori di origine **O**. Da quanto precede (figura a fianco) il modulo del vettore $\overline{OP}$ è $\overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}$: tale numero reale è detto modulo del numero complesso **x+yi**.



Questa corrispondenza biunivoca, come vedremo in seguito, stabilirà un espressivo legame fra numeri complessi, trigonometria e rotazioni del piano.
Si possono adesso introdurre la relazione di uguaglianza e le operazioni fra numeri complessi utilizzando anche la loro rappresentazione mediante vettori uscenti dall'origine.
*Se la parte immaginaria **y** è uguale a **0**, le proprietà formali dei numeri complessi* **C** *dànno gli stessi risultati dei numeri reali* **R**. **C** è allora un ampliamento di **R**.
Affinché non crediate che i numeri complessi siano solo un passatempo matematico, è bene chiarire che essi hanno trovato e trovano sorprendentemente importanti applicazioni, oltre che in matematica come studierete, in:
Dinamica dei fluidi, elettronica, informatica, telecomunicazioni, teorie dei segnali e fisica quantistica, un ramo della fisica quest'ultima sorto agli inizi del Novecento e cha rivoluzionato il nostro modo di concepire il mondo delle particelle atomiche e subatomiche e non solo.

4) Teorema di Lagrange
Prendiamo le mosse dall'interpretazione geometrica del teorema di **Rolle**, relativo a un intervallo chiuso e limitato **[a,b]**. Sotto le sue ipotesi esiste almeno un punto **c** di **]a,b**[, in cui la tangente **t** al grafico della funzione nel punto **T=(c,f(c))** ha coefficiente **m=0**, quindi è parallela all'asse $\vec{x}$, cioè alla retta **r** che passa per i punti **A=(a,f(a))**, **B=(b,f(b)=f(a))**.
È spontaneo porsi il problema:
Se **f(x)** è una funzione **continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b]** e **derivabile in]a,b**[e non abbiamo informazioni sui valori che la funzione assume agli estremi dell'intervallo **[a,b]**, esiste almeno un punto **c** di]**a,b**[per cui la tangente **t** al grafico della funzione nel punto **T=(c,f(c))** è parallela alla retta che passa per i punti **A=(a,f(a))**, **B=(b,f(b))**, come suggerisce l'intuizione?
Per risolvere il problema prendiamo le mosse da questa considerazione geometrica (figura).

Indichiamo con **H=[b,f(a)]** il punto comune alle rette **y=f(a)** e **x=b** (figura).



Detta **α** la misura dell'angolo **HÂB**, dal triangolo **AĤB**, rettangolo in **H**, abbiamo che il coefficiente angolare della retta **r≡AB** è **m=** $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = tan**α**.

Da questa **f(b)-f(a)=m(b-a)**, cioè **f(b)-f(a)=mb-ma**, da cui: **(*) f(b)-mb=f(a)-ma**. Cosa ci dice questa?....

Si, ci suggerisce che la funzione **g(x)=f(x)-mx** assume valori uguali agli estremi di **[a,b]**; *inoltre*…

Essa è **continua** in **[a,b]**, **derivabile** in **]a,b[** perché differenza di funzioni continue e derivabili nei rispettivi intervalli. *Allora*… per il teorema di **Rolle** esiste **c** ¿ **]a,b[** per il quale **g'(c)=0**. Conseguentemente **f'(c)-m=0**, da cui **f'(c)=m** e, per la (*):

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Il risultato ottenuto è quello che si chiama **teorema di Lagrange**.

Enunciato

Se **f(x)** è una funzione **continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b]** e **derivabile in]a,b[**, allora esiste almeno un punto **c** ¿]a,b[tale che **f'(c)=** $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ **.**

Le sue conseguenze sono molto importanti per determinare l'andamento di una funzione.

Concludo dicendo: ben vengano gli scacchi a scuola. Ma non sarebbe di gran lunga più efficace modificare l'approccio ai vari argomenti così che risulti più concreto e coinvolgente e usare le ore curricolari per abituare i giovani a escogitare sistematicamente strategie risolutive?

Giarre 11/01/2016 Alfio Grasso

grassoalfino@yahoo.it