SVILUPPO DELLA GEOMETRIA CON L'USO *STRUTTURALE* DELLE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Nelle giornate del **GIMat** del 21 e 22 Ottobre scorso ho tenuto un seminario dal titolo sopra scritto. Purtroppo la dilatazione dei tempi precedenti il mio seminario ha dimezzato la durata del mio intervento. Ciò non mi ha consentito di esporre in modo esauriente quanto previsto e non ha permesso le osservazioni dei partecipanti che sarebbero state molto utili per arricchirci reciprocamente.
Per ciò ho pensato di fare pubblicare su **Aetnanet** quanto avevo preparato, per esporre più compiutamente le mie idee.

Premessa

Per delineare l'aspetto metodologico-didattico che sta alla base del mio contributo prendo l'avvio da tre punti indicativi delle conclusioni del *Congresso* internazionale *di Cagliari sull'insegnamento della geometria del* **1982**:

- «Di geometria ne va insegnata parecchia, a tutti i livelli di scolarità; più di quanto si usa attualmente (figuriamoci ora!).
- «All'inizio del biennio di scuola superiore **occorre** prevedere uno *stadio di avvio* alla deduzione. Mentre l'assetto assiomatico deve essere l'obiettivo finale dell'attività didattica, ma **non** ne può costituire in alcun modo il punto di partenza».
- Poiché l'assiomatica di **Hilbert**, è molto complessa, l'insegnante ne deve possedere una, sottintesa:
  - più intuitiva, semplice, dai pochi assiomi **forti**;
  - aderente al *Programma di Erlangen* di **Klein**

Faccio notare che la geometria nei libri di testo è spesso relegata nelle ultime pagine, come se fosse figlia di un Dio minore, e le trasformazioni sono trattate "en passant". Diventano così un'incomprensibile, pesante e inutile sovrastruttura.

Caratteristiche dell'uso delle trasformazioni

- Mentre nella trattazione classica si pone l'accento su singole figure, di cui si studiano alcune proprietà con metodi specifici, con le trasformazioni è coinvolto tutto l'ambiente in cui si opera; ciò consente una maggiore generalità, sistematicità e unitarietà dei metodi di studio.
- Si possono usare sin dall'inizio i suggestivi metodi della geometria analitica, utile anche nello studio della Fisica già dal primo anno.
- È fondamentale la ricerca degli invarianti, mezzo basilare dell'indagine scientifica: in fisica sono importantissime le leggi di conservazione, cioè d'invarianza. Per le isometrie l'invariante è la distanza tra due punti, cioè la lunghezza del percorso più breve che li congiunge.
- All'inizio una strategia è la ricerca di qualche simmetria.
- Ulteriore elemento di forza delle trasformazioni risiede nella loro struttura di gruppo e nei loro sottogruppi.

Segnalo infine che nel *Programma di Erlangen* del **1872**, **Klein** propose, e la comunità scientifica fece proprio che:
"**Una** geometria è lo studio delle proprietà che si conservano quando si sottopone il piano (lo spazio) a un *gruppo di trasformazioni*".

Il mio intento consiste nel presentare l'assiomatica di Choquet (1964) che soddisfa le condizioni del terzo punto in premessa e che è già stata utilizzata, con qualche variante, negli interessanti testi scolastici di Lombardo Radice-Mancini Proia e Prodi. L'uso delle isometrie, in particolare della simmetria assiale, è lo strumento sia euristico sia dimostrativo.

ASSIOMI DELLA GEOMETRIA PIANA

ASSIOMA I (di incidenza)
Per due punti distinti passa una ed una sola retta.
ASSIOMA II (di Euclide)
Per un punto si può condurre una ed una sola retta parallela a una retta.
ASSIOMA III (di ordine)
Ogni retta è dotata di due relazioni d'ordine totale, una opposta all'altra.
ASSIOMA IV (o di partizione)
Data nel piano una retta r, l'insieme complementare di r rispetto a π è suddiviso in due sottoinsiemi, detti semipiani aperti, non vuoti, dotati di infiniti punti e tali che:

- **il segmento che congiunge due qualunque punti di uno stesso semipiano aperto non interseca r;**
- **il segmento che congiunge due qualunque punti di semipiani aperti diversi incontra r.**

ASSIOMA V (della distanza)
Esiste una funzione d, detta distanza, che associa un numero reale $r \geq 0$, che indichiamo con d(A,B), con le seguenti proprietà:

- **$d(A,B)=0$ se e solo se $A \equiv B$;**
- **per ogni coppia di punti (A,B), $d(A,B)=d(B,A)$ (proprietà simmetrica della distanza);**
- **assegnati una semiretta s di origine O ed un numero reale $r \geq 0$, su s esiste uno ed un solo punto P tale che $d(OP)=r$;**
- **per ogni terna di punti {A, X e B} si ha:**

$$d(A,B) \leq d(A,X)+d(X,B),$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se X appartiene al segmento AB.

ASSIOMA VI (di simmetria)
Per ogni retta s di π esiste una ed una sola simmetria di asse s.
ASSIOMA VII (della misura degli angoli)
Esiste una funzione che ad ogni numero reale $r \geq 0$ associa un angolo, di cui r è detto la misura o ampiezza, tale che alla somma di due angoli consecutivi corrisponde il numero somma delle ampiezze dei due angoli.

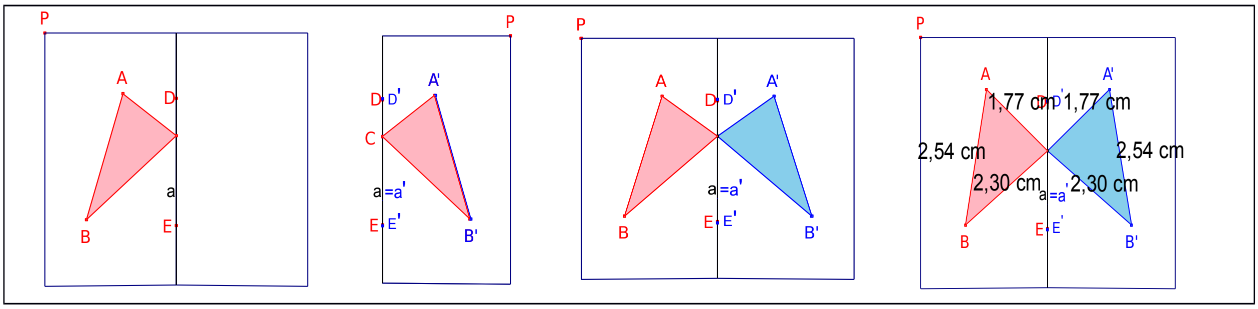
Piano di lavoro

Nota per i giovani sui "corpi rigidi".
Molti dei corpi che ci circondano hanno una struttura rigida, cioè, anche se vengono sottoposti a movimenti, la distanza di due qualsiasi loro punti rimane invariata. Questa caratteristica ci permette di stabilire un'importante corrispondenza biunivoca trai punti del piano.

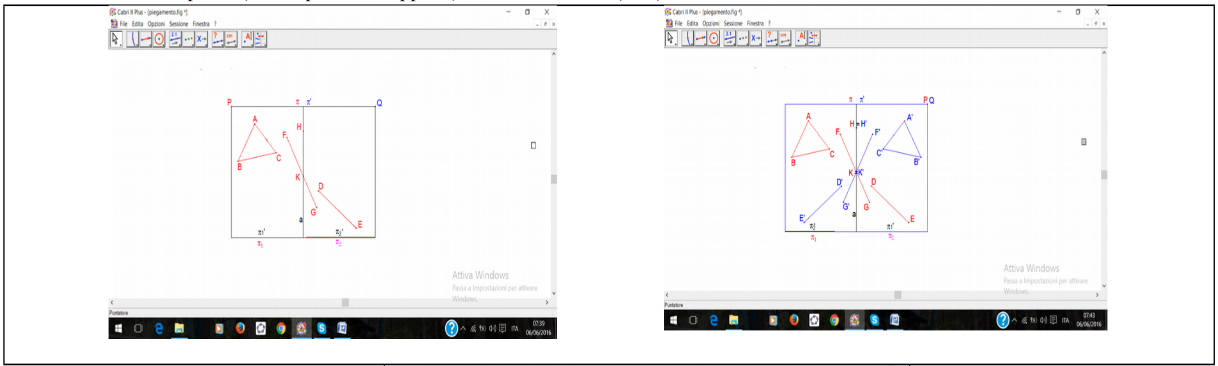
A questo punto, alcune *attività* fatte svolgere agli allievi e la presentazione discussa di file di Cabrì progettato *ad hoc*, consentono loro di assimilare la nozione di corrispondenza biunivoca fra i punti di un piano (di due piani sovrapposti) e ricavare le proprietà fondamentali delle isometrie:

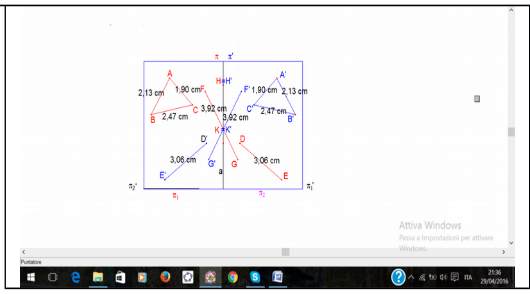
- Una retta ha per immagine una retta, cioè, se un punto P descrive una retta r, il suo associato P' traccia una retta r' che diciamo corrispondente di r.
- Una **semiretta** si tramuta in una **semiretta.**
- Un **segmento** si trasforma in un **segmento di uguale lunghezza.**
- Un **semipiano** ha per immagine un **semipiano**.
- L'associato di un **angolo,** è un **angolo** di uguale ampiezza.
- **Rette incidenti** hanno per corrispondenti **rette incidenti**.
- **Rette parallele** si trasformano **in rette parallele.**

Segue quello che avrei presentato.
Messa in rilievo l'importanza della simmetria bilaterale o speculare in natura e arte presento alcuni progetti che ho realizzato con Cabrì, che dal piegamento del foglio conducono alla simmetria assiale, di cui mostro le sequenze delle situazioni che si presentano.
Piegamento del foglio



Ribaltamento di un piano (di due piani sovrapposti) attorno a una sua (loro) retta.

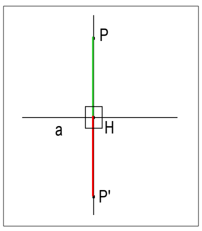




La **simmetria assiale: regina e "madre"** di tutte le isometrie.
Infatti, come proveremo in seguito, tutte le isometrie si possono ottenere applicando successivamente al più **tre** simmetrie assiali.

Simmetria rispetto a una retta o simmetria assiale.
Per quanto già osservato possiamo dare la definizione:
Data una retta **a**, diciamo simmetria di asse **a**, l'isometria tale che:

- Tutti e soli i punti di **a** sono uniti. (*Si dice pure che la retta* a *è luogo di punti uniti*).
- Ogni punto di uno dei semipiani aperti determinati da a si trasforma in un punto del semipiano aperto opposto**.**

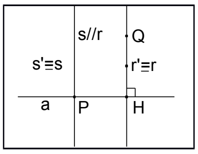


Dalla prima caratteristica della simmetria assiale, sappiamo che l'asse è costituito di punti uniti. Per la seconda è spontaneo chiedersi se la retta che passa per un punto **P** che non appartiene all'asse e per il suo corrispondente **P'** gode di qualche particolare proprietà.
Chiamiamo $\mathbf{s_a}$ la simmetria di asse **a**, **P** un punto che non le appartiene e **P'** il suo simmetrico. Poiché **P** e **P'** stanno in semipiani aperti opposti, il segmento **PP** interseca **a** in un punto, diciamolo **H,** che per ciò è unito. Allora la retta **PP'** è anche la retta, **PH** o **P'H**; ma esse sono corrispondenti in $\mathbf{s_a}$, quindi la retta **PP'** è unita nella simmetria rispetto ad **a**.
Quanto provato costituisce il
Teorema
In una simmetria assiale la retta che congiunge due punti corrispondenti distinti è unita.
Sotto la forma condizionale:
Se $\mathbf{s_a}$ *è la simmetria assiale rispetto a una retta* ***a***, allora *la retta per due punti associati distinti è* **unita** in $\mathbf{s_a}$.

Osservazione
Gli angoli formati dall'asse e dalla retta **PP'** sono di uguale ampiezza perché associati in un'isometria e sono retti perché supplementari.

Visto il ruolo speciale che ha la retta che congiunge due punti corrispondenti distinti diamo la seguente
Definizione
Una retta **b** si dice *perpendicolare* a una retta **a**, se **b** *è diversa* da **a** e *unita* nella simmetria di asse **a**.

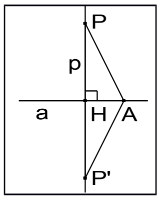
L'osservazione precedente "salda" la nuova definizione di perpendicolarità con quella nota dalla scuola media e la comprende.
Il teorema e la definizione precedenti assicurano il
Corollario 1
Per un punto fuori di una retta passa una e una sola perpendicolare alla retta data.
La perpendicolare da un punto a una retta è la retta che passa per il punto dato e per il suo simmetrico rispetto alla retta assegnata.
E' naturale chiedersi se questa proprietà è vera anche quando il punto appartiene alla retta. A ciò risponde affermativamente il teorema successivo
[È importante fare assimilare con diverse applicazioni questo nuovo modo d'intendere la perpendicolare a una retta da un punto dato]
Teorema
Per un punto di una retta si può condurre una sola perpendicolare alla retta.
Chiamiamo **P** il punto, **a** la retta ed $\mathbf{s_a}$ la simmetria di asse **a**; proviamo che esiste per **P** una sola retta unita in $\mathbf{s_a}$, servendoci del teorema precedente.
Sappiamo che per un punto **Q** $\notin$ **a** possiamo condurre una sola perpendicolare **r** ad **a**, che è unita in $\mathbf{s_a}$: **r'≡r**. La retta che cerchiamo deve essere una "particolare" retta per **P** : la parallela **s** per **P** a **r**. Determiniamo la retta **s'** simmetrica di **s**. La retta **s'** deve passare per **P** perché punto unito in $\mathbf{s_a}$ e inoltre essere parallela a **r'≡r**, perché in un'isometria rette parallele si trasformano in rette parallele. Allora **s'** deve passare per **P** ed essere parallela a **r**: poiché è unica la parallela da un punto ad una retta **s'** coincide con **s**, quindi perpendicolare ad **a** in forza della definizione data.



Il **Corollario 1** e il **Teorema** precedente assicurano il
Teorema
Per ogni punto del piano esiste una sola perpendicolare a una retta data.

(La dimostrazione di esistenza e unicità della perpendicolare da un punto a una retta nella trattazione classica è lunga, artificiosa e pesante).

Affrontiamo ora il seguente problema.
Dati un punto **P** e una retta **a** cui non appartiene, tra i punti di **a** ne esiste uno la cui distanza da **P** sia minima?
Esso deve essere un "particolare" punto di **a**, come possiamo trovarlo? Usiamo, come di frequente, la simmetria $\mathbf{s_a}$ rispetto ad **a**.
Sia **P'** il simmetrico di **P**; l'intuizione ci suggerisce che il nostro punto è **H**, quello comune, ad **a** e alla retta **PP'**; proviamolo confrontando $\overline{PH}$ e $\overline{PA}$, dove **A** è un altro qualsiasi punto di **a** (figura).
Poiché vogliamo provare che $\overline{PH} < \overline{PA}$, applichiamo la proprietà triangolare al triangolo **PP'A**: (*) $\overline{PP'} < \overline{PA} + \overline{AP'}$; poi (**) $\overline{HP'} = \overline{HP}$ e $\overline{P'A} = \overline{AP}$ perché lunghezze di segmenti simmetrici. Ma $\overline{PP'} = \overline{PH} + \overline{HP'}$, quindi, per la (*) $\overline{PH} + \overline{HP'} < \overline{AP} + \overline{PA'}$, e per la (**) $2\overline{PH} < 2\overline{PA}$, cioè $\overline{PH} < \overline{PA}$; che è quanto intuito.

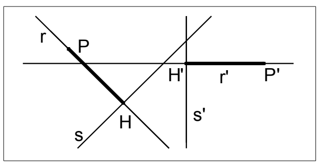


Abbiamo così scoperto il
Teorema
Se **P** *è un punto fuori di una retta* **a**, allora *esiste su* **a** *un* **solo** *punto la cui distanza da* **P** *è minima*.
Esso è il punto **H** comune ad **a** e alla perpendicolare per **P** ad **a**. Chiaramente se il punto sta sulla retta quello cercato è se stesso.

Il precedente risultato è particolarmente importante perché esprime la **perpendicolarità** in termini di **distanza minima** tra un punto e una retta:
(**) *La perpendicolare da un punto P a una retta* **a** *si può pensare così come la retta per P e per il punto di* **a** *che possiede distanza minima da P*; questa si *definisce distanza di* **P** *da* **a**.
In riferimento alla figura precedente, *il segmento* **PA***, con* **A≠H** *proiezione di* **P** *su* **a***, si dice segmento di obliqua*.
Il teorema precedente ci dice inoltre:
La lunghezza di ogni segmento di obliqua da un punto a una retta è maggiore della distanza del punto dalla retta.

A questo punto dell'esposizione vi presento alcuni teoremi e problemi che mettono in luce l'importanza dell'uso della simmetria assiale e ne chiariscono le modalità con cui utilizzarla.

Teorema
In un'isometria rette perpendicolari si trasformano in rette perpendicolari.
Siano **r** ed **s** due rette perpendicolari, **H** il loro punto comune e **P** un punto di **r** diverso da **H**; indichiamo con **r'**, **s'** nell'ordine, le rette corrispondenti di **r** ed **s** in una isometria **σ**, e con **H'** e **P'**, rispettivamente, gli associati di **H** e **P**.
Poiché per ipotesi **s** è perpendicolare a **r**, allora **H** è il punto di **r** a distanza minima da **P**, ma allora **H'** deve essere il punto di **r'** a distanza minima da **P'** perché in un'isometria si conservano le distanze: **s'** è dunque perpendicolare a **r'**.

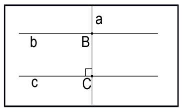


È opportuno far notare ai giovani che il grafico, in questo caso, non è di alcun aiuto, ma lo sono le proprietà.

È semplice provare le proposizioni:
Teorema
Se una retta interseca l'asse in un punto allora la retta simmetrica incontra l'asse nello stesso punto.
Teorema
In una simmetria assiale una retta parallela all'asse si trasforma in una retta parallela all'asse.
Se una retta è parallela all'asse di simmetria allora la sua corrispondente è parallela all'asse.
Corollario (importante)
Se due rette corrispondenti in una simmetria assiale sono incidenti, allora il loro punto comune è unito, cioè appartiene all'asse.

Teorema

Se due rette sono parallele, allora ogni perpendicolare a una è perpendicolare all'altra.

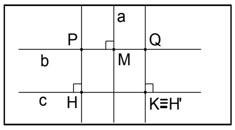


Siano **b** e **c** le rette parallele e **a** la perpendicolare a **c** in un suo punto **C.** Proviamo che **b'**, trasformata di **b** nella simmetria $\mathbf{s_a}$ di asse **a**, coincide con **b**. Infatti, in $\mathbf{s_a}$ **c** è unita per ipotesi, e **b'**, la simmetrica di **b** deve passare per **B** che è unito ed essere parallela a **c** perché in un'isometria rette parallele hanno immagini parallele.

Teorema

Se due rette sono parallele, allora le distanze dei punti di una dall'altra sono uguali.

Siano **b** e **c** due rette parallele, **P** e **Q** due qualsiasi punti di una di esse, a esempio **b**, e **H** e **K** nell'ordine le proiezioni ortogonali di **P** e **Q** su **c**: proviamo, come suggerisce l'intuizione, che $\overline{QK} = \overline{PH}$.

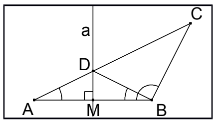


Innanzitutto **PH** e **QK** sono rette parallele perché perpendicolari alla retta c. Poi è ragionevole servirsi della simmetria $\mathbf{s_a}$ rispetto all'asse **a** del segmento **PQ** e provare che ad **H** è associato **K**. Infatti, l'immagine **H'** di **H** in $\mathbf{s_a}$ deve stare su **c** che è retta unita perché perpendicolare all'asse e avere da **b** distanza minima: questo punto è **K**, quindi **H'≡K** e da ciò $\overline{QK} = \overline{PH}$, che è la tesi.

Questa proprietà si può applicare in geometria analitica al primo anno per ottenere le equazioni di rette parallele agli assi.

Teorema

Se in un triangolo due angoli sono disuguali, allora a lato maggiore è opposto angolo maggiore (figura).



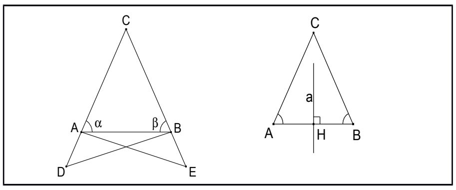
Sia ABC un triangolo in cui $\overline{AC} > \overline{BC}$. Consideriamo la simmetria $\mathbf{s_a}$ rispetto all'asse **a** del segmento **AB**. Dalle proprietà dell'asse di un segmento **A** e **C** appartengono a semipiani aperti opposti, quindi **AC** interseca **a** in **D**. In $\mathbf{s_a}$ **BÂD** si trasforma in $A\hat{B}D$, che ha uguale ampiezza; $A\hat{B}D < A\hat{B}C$ perché interno a questo: da ciò la tesi.

Confronto fra le dimostrazioni classica e moderna del teorema:

Se un triangolo ha due angoli congruenti (isometrici) allora è isoscele.

Sappiamo tutti che la dimostrazione classica è artificiosa, lunga e complessa (figura in basso a sinistra). Vediamo come usando la simmetria assiale tutto è più semplice e chiaro.

Sia **ABC** un triangolo di base **AB**; per l'ipotesi $\hat{A} \cong \hat{B}$ (figura in basso). Usiamo la simmetria $\mathbf{s_a}$ rispetto all'asse **a** della base, che passa per il suo punto medio **H**. In $\mathbf{s_a}$ la semiretta $\overrightarrow{AB}$ ha per immagine la semiretta $\overrightarrow{BA}$, e la semiretta $\overrightarrow{BC}$ si trasforma nella semiretta di origine **A** – simmetrico di **B** – e che forma con $\overrightarrow{AB}$ un angolo di ampiezza uguale a $\hat{B}$: questa è la semiretta $\overrightarrow{AC}$. Allora le semirette corrispondenti $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$ sono incidenti in **C,** che risulta unito (**Corollario importante**), e quindi sta sull'asse del segmento **BC**: la retta **CH** è asse di simmetria per il triangolo **ABC** che risulta così isoscele.



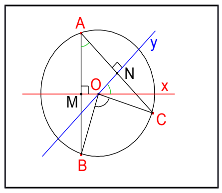
.

Teorema

In una circonferenza ogni angolo alla circonferenza è metà dell'angolo al centro che insiste sullo stesso arco.

La dimostrazione classica presenta vari casi e sottocasi.

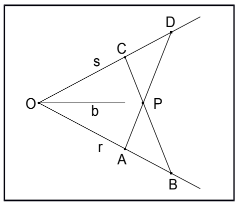
Utilizziamo la simmetria considerando il caso in cui i lati dell'angolo alla circonferenza sono secanti. Ricordo che: il "prodotto" di due simmetrie con assi incidenti è una rotazione, cioè un angolo, la cui ampiezza è doppia di quello formato dai due assi.



Siano **BÂC** e BÔC (figura) gli angoli esaminati. Consideriamo l'angolo **xÔy** formato dagli assi dei lati **AB** e **AC**. La simmetria $\mathbf{s_x}$ di asse **x** trasforma **B** in **A** e quella $\mathbf{s_y}$ di asse **y** muta **A** in **C**, quindi la rotazione **ρ=y*x** associa **C** a **B** e dà l'angolo **BÔC** che risulta doppio di **xÔy**. Questo poi ha la stessa ampiezza di **BÂC** perché angoli a lati perpendicolari e dello stesso verso: allora l'angolo **BÔC** ha ampiezza doppia di **BÂC**, da cui la tesi.

Problema

Sui lati dell'angolo **rÔs** (figura) si prendano i punti **A** e **B** su **r** e **C** e **D** su s tali che $\overline{OC} = \overline{OA}$ e $\overline{OD} = \overline{OB}$.



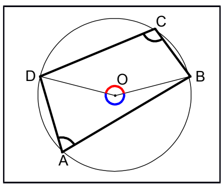
Dimostrare che il punto **P** comune alle due corde appartiene alla bisettrice.

La dimostrazione classica è lunga e laboriosa, svolgetela e ve ne renderete conto.

Con la simmetria tutto è più semplice e immediato. Infatti, poiché la bisettrice di un angolo è l'asse di simmetria dei suoi lati, consideriamo la simmetria $\mathbf{s_b}$ di asse la bisettrice. In $\mathbf{s_b}$ ad **A** corrisponde **C** e **B** ha per immagine **D** in forza delle ipotesi; allora **AD** e **CB** sono segmenti corrispondenti e incidenti nella simmetria, quindi il loro punto comune P è unito in $\mathbf{s_b}$ (**Corollario importante**) e di conseguenza sta sulla bisettrice.

Teorema

Se un quadrilatero convesso è inscritto in una circonferenza, allora i suoi angoli opposti sono supplementari.

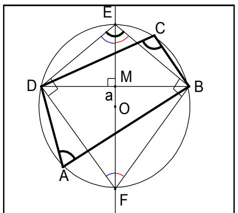


In diversi testi ho trovato la seguente dimostrazione che sintetizzo usando la figura.

Consideriamo a esempio gli angoli alla circonferenza **Â** e **Ĉ** che sono opposti. **Â** è metà dell'angolo **BÔC** (in rosso) e **Ĉ** metà di **DÔB** (in blu); poiché **BÔC+DÔB** è un angolo giro, **Â+Ĉ** vale un angolo piatto.

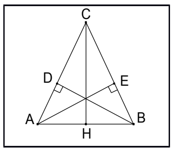
Secondo me tale argomentazione presenta almeno un'incongruenza che cerco di chiarire.

Si dice che **BÔC+DÔB** è un *angolo giro* (che presenta anch'esso delle criticità): ma la somma dei questi due angoli non ha senso perché non sono consecutivi, infatti **non hanno un solo lato comune**, **ne posseggono due OB** e **OD**.

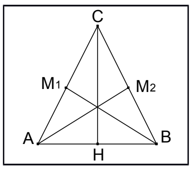


Gradirei che mi fosse segnalato cosa non è corretto nel mio ragionamento.
Ecco un'altra dimostrazione che utilizza la simmetria della circonferenza rispetto a ogni retta per il suo centro.
Considero l'asse di simmetria a di una corda – nel grafico **DB** – e osservo che: 1) $D\hat{E}B \cong D\hat{C}B$ perché angoli alla circonferenza che insistono sull'arco DFB e 2) $D\hat{F}B \cong D\hat{A}B$ perché angoli alla circonferenza che sono capaci dell'arco **DEB**. Nei triangoli **EDF** ed **EBF** sono complementari $D\hat{F}E$ ed $E\hat{F}D$ e anche $F\hat{E}B$ e $D\hat{F}E$ perché i triangoli **EDF** e **EBF** sono rettangoli in quanto inscritti in una semicirconferenza: allora $D\hat{E}B + B\hat{F}D$ dà un angolo piatto e da 1) e 2) $D\hat{C}B + B\hat{A}D$ risulta un angolo piatto, e da ciò la tesi.
Analoghe argomentazioni per gli angoli opposti $\hat{B}$ e $\hat{D}$, usando l'asse della diagonale **AC**.

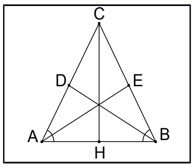
Comparazione delle dimostrazioni nei sistemi tradizionale e "moderno" del teorema:
<u>In ogni triangolo isoscele le altezze e le mediane relative ai lati congruenti (isometrici) sono congruenti (isometriche); inoltre le bisettrici degli angoli alla base sono congruenti (isometriche)</u>.
Nello studio tradizionale si devono fare tre dimostrazioni con tre diversi criteri di congruenza (tra cui quello dei triangoli rettangoli poco "frequentato"), che sono complesse perché i triangoli sono "incastrati" uno nell'altro.
Nello sviluppo "moderno", un triangolo si dice isoscele se ha un asse di simmetria, **CH** per noi:
C è unito e **A** e **B** sono corrispondenti, quindi $\overline{CA} = \overline{CB}$. Con la simmetria $\mathbf{s_{CH}}$ di asse **CH** otteniamo le tre proprietà poiché in un'isometria si conservano *lunghezze* e *ampiezze*.
Altezze: nella simmetria $\mathbf{s_{CH}}$ **CA** e **CB** sono corrispondenti e il punto **E**, che è quello di **CB** a distanza minima da **A**, si trasforma nel punto di **CA** a distanza minima da **B,** cioè **D**, perché in un'isometria le distanze si conservano: allora $\overline{AE} = \overline{BD}$.



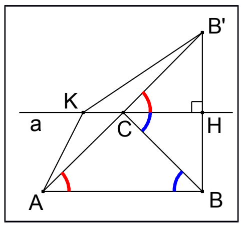
Mediane: In $\mathbf{s_{CH}}$ **CA** e **CB** sono associati ed $\mathbf{M_1}$, punto medio di **AC,** ha per immagine il punto medio di **BC**, ossia $\mathbf{M_2}$, perché in un'isometria le distanze rimangono invariate; dunque: $\overline{AM_2} = \overline{BM_1}$.



Bisettrici:
In $\mathbf{s_{CH}}$ **CA** e **CB** sono corrispondenti e la semiretta **AE** si tramuta nella semiretta di origine **B** – simmetrico di A - e che forma con la semiretta **BA** un angolo di ampiezza pari a quella di **BÂE**, ma questa è la semiretta **BD**; allora nella simmetria $\mathbf{s_{CH}}$ **E** ha per immagine **D**, quindi $\overline{AE} = \overline{BD}$.



Problema
Un'impresa ha due grossi depositi di materiale per l'edilizia su una strada al confine di una città. Ha vinto la gara d'appalto per costruire in una zona pianeggiante fuori città una strada che sarà parallela a quella in cui sono i depositi. In quale punto del tracciato dovrà costruire il cantiere di lavoro se vuole che i mezzi di trasporto, partendo da un deposito portino materiali al cantiere e da questo i rifiuti all'altro deposito facendo il percorso più breve e quindi più economico in costi e tempi?



Schematizziamo la situazione come in figura, in cui **A** e **B** sono i depositi e **a** la strada da costruire. Usiamo la simmetria $\mathbf{s_a}$ di asse **a**; sia **B'** (o **A'**) il simmetrico di **B** (di **A**). Il segmento **AB'** è il percorso più breve tra **A** e **B'** e interseca **a** nel punto **C**, poiché **A** e **B'** sono in semipiani aperti opposti rispetto ad **a**; poiché in $\mathbf{s_a}$ **C** è punto unito e a **B** corrisponde **B'**, $\overline{CB'} = \overline{CB}$, quindi (*) $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{CB'} = \overline{AB'}$. Costruiamo ora un altro percorso da **A** a **B** passando per un punto **K** di **a** da diverso da **C**. Poiché $\overline{KB'} = \overline{KB}$, $\overline{AK} + \overline{KB} = \overline{AK} + \overline{KB'}$; per la proprietà triangolare applicata ad **AKB'** abbiamo: $\overline{AB'} < \overline{AK} + \overline{KB'}$, cioè $\overline{AB'} < \overline{AK} + \overline{KB}$. Per la (*) questa diventa $\overline{AC} + \overline{CB} < \overline{AK} + \overline{KB}$: **C** è il punto cercato.
Ho tradotto in una situazione concreta il problema di minimo:
Fra i triangoli di base e altezza assegnate, quello di perimetro minimo è il triangolo isoscele.
Infatti, dopo quanto provato, $H\hat{C}B' \cong B\hat{A}C$ perché corrispondenti delle parallele **AB** e **a**, tagliate da AB', e $C\hat{B}A \cong B\hat{C}H$ essendo alterni interni delle parallele **AB** e **a** tagliate da **CB**: allora **ABC** è isoscele sulla base **AB**.

Spero di avere chiarito quanto mi ero proposto, per quanto è possibile in una sintesi.

Bibliografia
Morin-Busulini: Elementi di geometria.
Choquet: L'insegnamento della geometria.
Lombardo Radice-Mancini Proia: Il metodo matematico.
Prodi: Matematica come scoperta.

Alfio Grasso email: grassoalfino@yahoo.it