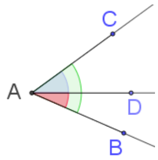
Ai colleghi docenti di matematica.
Circa quattro anni fa mi è stato pubblicato su Aetnanet un articolo dal titolo "All'angolo", in cui presentavo alcune gravi contraddizioni originate dalla definizione di angolo come "parte di piano", e, conseguentemente dal cosiddetto angolo giro, di cui dimostravo l'inesistenza.
Più di milletrecento ne hanno letto almeno il Riassunto, che esprime il nocciolo del problema. Nessuno dei colleghi mia aveva contattato, neppure per dire che le mie argomentazioni erano errate.
Successivamente, l'articolo era stato pubblicato sul Periodico I-II della Mathesis Nazionale del 2019 e sui Quaderni di Matematica dell'Università di Palermo, dopo che al GiMat del 2018 avevo svolto una Comunicazione dal titolo "L'angolo giro non esiste".
Avevo inviato l'articolo al Direttore del Dipartimento di matematica di un prestigioso Istituto di Catania, e questi, con squisita cortesia, non mi aveva neanche risposto di avere ricevuto il file.
Un mese fa ho inviato l'articolo, ancora più preciso e puntuale nelle argomentazioni, alla Mathesis Nazionale, che è stato visionato dalla Commissione Scientifica, e sono stato invitato a tenere una Comunicazione al Congresso Nazionale che si terrà Verona e Firenze, che terrò il 13 Novenmbre.
A questo punto ho ritenuto opportuno riproporre questa nuova versione.
Se qualcuno, nonostante le varie verifiche cui è stato sottoposto l'articolo, vi trovasse errori concettuali, gradirei che me lo segnalasse, argomentando razionalmente.

CRITICHE SULLA DEFINIZIONE DI ANGOLO COME "PARTE DI PIANO"

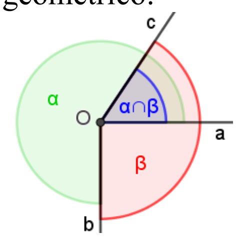
L'ANGOLO GIRO NON ESISTE!

La definizione di angolo come parte di piano è di Arnauld - noto a pochi di noi - nel 1667.
Forti critiche furono espresse da matematici come Clairaut, nel 1774, Veronese, nel 1892, e, nel 1946, dalla Professoressa Emma Castelnuovo, didatta di fama internazionale. E, riguardo alla sua inspiegabile persistenza tutt'oggi, sono illuminanti le parole del Professore Giovanni Prodi:
«La matematica deve conservare i suoi risultati fondamentali, ma finisce spesso per prolungare certi abiti mentali al di là del loro limite naturale di sopravvivenza».
Hilbert, nei Fondamenti, dà le seguenti definizioni:

1. In un piano α diremo angolo di vertice O una coppia (h,k) o (k,h) di semirette <u>diverse</u> della stessa origine O, <u>che **non** appartengono alla stessa retta</u>.
   Questa definizione, come quella di Euclide, si limita ad angoli convessi, strettamente compresi tra l'angolo nullo e quello piatto.
2. Dato un angolo BÂC, sia AD una semiretta interna all'angolo. Diremo che l'angolo BÂC è la somma degli angoli BÂD e DÂC.

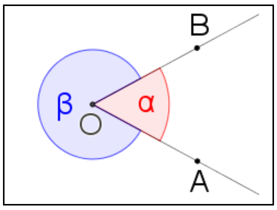


Così, l'angolo somma di due angoli ha senso se hanno in comune **solo** un lato.
I libri di testo hanno "tradotto" la definizione di somma di angoli di Hilbert introducendo gli angoli consecutivi, cioè aventi in comune **solo** un lato; quindi, l'angolo somma di due angoli è definito **soltanto** se questi sono consecutivi:
<u>esso è determinato dai lati non comuni ai due angoli dati</u>.
Osserviamo che, sia i libri di testo che noi docenti soffriamo di uno strabismo…geometrico: definiamo gli angoli alla Arnauld e li addizioniamo alla Hilbert!



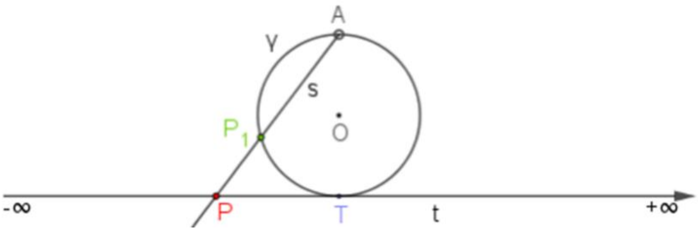
Quanto precede ha come conseguenza che la somma di angoli **non** si può definire per tutte le coppie di angoli. Infatti (figura), secondo la definizione, l'angolo concavo aÔb e l'angolo convesso bÔc **non** si possono addizionare perché hanno in comune l'angolo convesso aÔb. Da ciò non ha significato parlare di multipli di un angolo e di una sua misura:
<u>L'insieme degli angoli</u> **non** *<u>è una classe di grandezze omogenee</u>*.
Cadono così in difetto molte delle proprietà che si riferiscono agli angoli e alle loro misure.

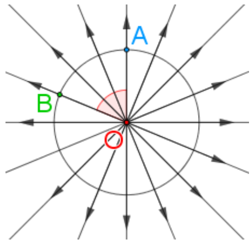
Incoerenze dell'angolo giro



<u>Esso **non** è somma di alcuna coppia di angoli</u>. Infatti, secondo la definizione, gli angoli AÔB convesso e AÔB concavo, **non** si possono addizionare perché hanno **due** lati comuni.

Per dimostrare che l'angolo giro non esiste, premettiamo il seguente teorema della Teoria degli insiemi (G. Lolli, Guida alla Teoria degli insiemi, pag.47).
<u>Se A è un insieme infinito e B un insieme finito o numerabile, disgiunto da esso, allora gli insiemi A e A-B sono equipotenti</u>.
Esso ci consentirà di dimostrare che una circonferenza è equipotente all'insieme dei numeri reali R, cioè che: <u>ogni circonferenza ha la potenza del continuo</u>.
Data una circonferenza γ di centro O, sia t la tangente in un suo punto T e A il simmetrico di T rispetto a O (figura). Consideriamo il fascio Φ di semirette per A privato delle semirette tangenti in A a γ. Scelto su t un qualunque punto P di t, c'è una biiezione tra Φ ed t, cioè tra Φ e γ-{A}; γ e γ-{A} soddisfano così le ipotesi del teorema precedente, quindi γ ed R sono equinumerosi:
allora γ ed R sono equipotenti.

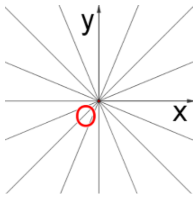




Consideriamo ora una circonferenza c e il fascio Ψ di semirette, entrambi di centro O (figura). Chiamiamo A un punto <u>assegnato</u> su c e B un <u>qualsiasi</u> punto di c. Se B≡A, AÔB è l'angolo nullo. Al variare di B su c, AÔB, **riempie**, descrive tutto il piano, <u>per la continuità di c</u>, e nessuna semiretta OB generica si sovrappone ad OA; infatti, ogni semiretta è presente in Ψ una sola volta:

l'angolo giro non esiste!

È interessante notare che tutti noi docenti, a nostra insaputa, abbiamo utilizzato questa conclusione.



Sia Φ il fascio di rette di centro l'origine O del consueto riferimento cartesiano.
Φ descrive, **riempie** tutto il piano. E, c'è una biiezione tra le rette di Φ e le equazioni del tipo ax+by=0, con a e b non contemporaneamente nulli. Se b=0 l'equazione associata è x=0, cioè l'asse y; per b≠0 la retta generica di Φ ha equazione y=(-a/b)x, la quale, posto m=(-a/b) dà: y=m·x, con]-∞<m<+∞[. Poiché in un fascio di rette una di esse è presente solo una volta:

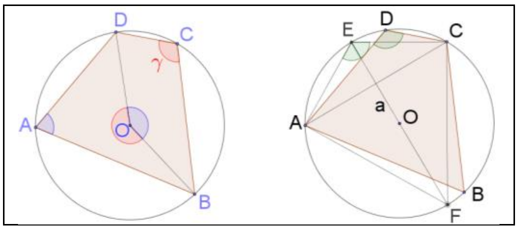
<u>nessuna retta generica si sovrappone all'asse y</u>.

Sul cosiddetto angolo giro si fondano, purtroppo, a esempio, i seguenti teoremi:

1. La somma degli angoli interni di un poligono (convesso) di n lati è n-2 angoli piatti.
2. Se un quadrilatero (convesso) è inscritto in una circonferenza, allora i suoi angoli opposti sono supplementari.

Per il primo, supponiamo che il poligono sia un ennagono, allora la somma degli angoli interni vale sette angoli piatti, cioè tre piani più…mansarda, un semipiano. Ma, <u>la somma di più angoli è un **angolo**</u>: come può un angolo – che è sottoinsieme del piano – avere come <u>sottoinsieme proprio</u> il piano? Ciò è assurdo. Esso deriva dalla confusione, generata dai libri e da noi insegnanti, tra angolo e sua misura: un angolo è un sottoinsieme del piano, mentre una misura è un numero reale; essi sono enti del tutto diversi! Un angolo ha infinite misure, multiple, per numeri interi relativi, di 2π o 360°.
Riguardo al teorema 2 (figura), si dice: l'angolo Â è metà dell'angolo convesso BÔD e l'angolo Ĉ è metà di BÔD concavo (a sinistra); e, poiché BÂD+BÔD dà l'angolo giro, Â+Ĉ è un angolo piatto!

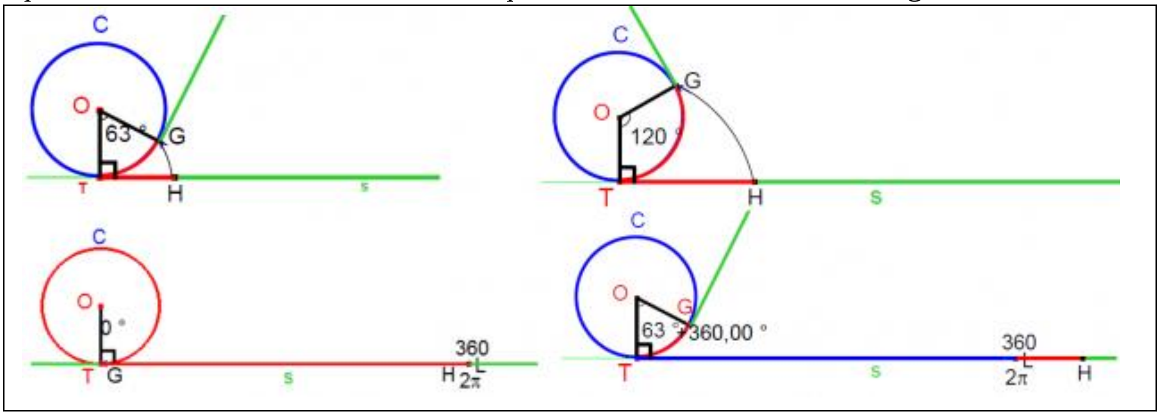
Ma BÔD convesso e BÔD concavo non si possono addizionare perché hanno **due** lati comuni, **non** uno solo. La dimostrazione è priva di significato. A destra una dimostrazione corretta, basata sulla simmetria rispetto all'asse di [A,C].



Una possibile soluzione per superare le contraddizioni evidenziate.
Choquet, in *Assiomatica a base metrica* del 1964, formula il VII (e ultimo) assioma di misura degli angoli – ventuno quelli di Hilbert - come segue:
A ogni numero reale r≥0 è associato un angolo α(r), di cui r è detto misura, tale che l'angolo associato alla somma di due qualsiasi numeri reali x e y è la somma degli angoli immagini di x e y:

$$(*) \quad \boldsymbol{\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y)}.$$

L'assioma di misura degli angoli si può chiarire con il calcolo del giro-vita o come una fettuccia che si avvolge sul proprio rullo in un avvolgibile, o ancora una semiretta che si "arrotola" su una circonferenza, che è bene rendere "concreto" perché visivo, con un progetto di software dinamico, come quello che ho realizzato oltre venticinque anni fa, da cui ho tratto le figure.



Ogni misura deve essere additiva e monotòna. Quella presentata è additiva per assioma, e, la sua monotonia si prova facilmente. Infatti.
Siano z e x due qualunque numeri reali tali che **z>x**; allora, esiste un unico numero reale **y** per cui **z=x+y**. Chiamati **α(z)**, **α(x)** e **α(y)** gli angoli associati rispettivamente a **z**, **x** e **y**. Così:
α(z)=**α(x+y)**, e, per la linearità, **α(z)=α(x+y)=α(x)+α(y)**; allora **α(z)>α(x)**, quindi la tesi.
Choquet definisce poi *rotazione* l'isometria con un **solo** punto unito. Chiama *angolo* di due semirette ordinate **a** e **b**, di origine O come la rotazione di centro O che muta **a** in **b** in un dato senso.
Se a **p** ∊ R si associa l'angolo piatto, **α(2p)** è quello nullo; quindi, qualunque k ∈ Z, **α(2kp)** è l'angolo nullo. Infatti:

α(2kp)=α(2p)+α(2p)+...........+α(2p)
1, 2,...................., k.

Detto allora $\mathbf{x_0}$ un numero reale, con $\mathbf{0 \le x_0 < 2p}$, per l'additività della misura:

$$\boldsymbol{\alpha(x_0+2pk)=\alpha(x_0)+\alpha(2pk)=\alpha(x_0)}.$$

Gli infiniti numeri reali $\mathbf{x_0+2pk}$ sono misure di $\boldsymbol{\alpha(x_0)}$.
Osserviamo che questa misura è coerente con la goniometria; infatti, nell'equazione **cos(x)=1**, le soluzioni di, sono: **x=2k*π***, con k ∈ Z.
Alla luce di quanto evidenziato, non sarebbe opportuno che i docenti di matematica, che hanno il compito di abituare gli studenti a una mentalità critica la esercitassero per primi?
Chi volesse comunicare con me può farlo con l' E-mail che è sotto.

Giarre 03/11/2021

Alfio Grasso
E-mail: grassoalfino@yahoo.it